中京大学工学部電気電子工学科

学科目	物理学	出題者	白井　英俊	試験日	2014 年　6 月　2 日　月曜日　実施
注意事項	持ち込みできるものは、指定用紙のみ。解答の順番は自由である。不正行為者に対しては、物理学の単位を F とする。				

問題1.　太陽と地球の距離は 150×10^6 km, 光の速さは 3.0×10^8 m/sとする。**単位や有効数字**に注意して、以下の問に答えよ

(1) 光が太陽から地球に到達するのに要する時間を求めよ。

答:　$150\times10^6\times10^3/(3.0\times10^8) = 500$　∴　5.0×10^2 s

(2) 地球は太陽を中心とした円周上を運動している(円運動)とみなせる。この円運動における地球の角速度 ω と速さ v を求めよ（単位も明記すること）。ただし $\pi = 3.14$、1 年は 365 日として計算せよ。なお、計算には、$365\times24\times60\times60 ≒ 3.15\times10^7$ を用いても良い。

答:　周期 $T=$ 3.15×10^7 s であるから

角速度:$\omega = 2\pi/T ≒ 1.99\times10^{-7}$ rad/s　　（ただし 2.0×10^{-7} rad/s も正解とする）

速さ $v =$　$R\omega = 1.50\times10^{11}\times2.0\times10^{-7} ≒ 2.99\times10^4$ m/s　(3.0×10^{-7}m/s も OK)

問題 2.　2 つのベクトル $\boldsymbol{A} = (1,-2,-2)$ 、 $\boldsymbol{B} = (1,-1,0)$　について、以下のものを求めよ。

(a)　内積(スカラー積)　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

答:　3　　$(= 1\times1+(-2)\times(-1)+(-2)\times0 = 1+2)$　　注意: 結果はスカラー

(b) 外積(ベクトル積) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

答: (-2, -2, 1)　　$= (-2\times0-(-1)\times(-2), (-2)\times1-1\times0, 1\times-1-(-2)\times1)$

もしくは $-2\boldsymbol{i} -2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$　　注意: 結果はベクトル

(c) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$がなす角 θ （$\cos\theta$ の値でも良い）

答:　$|A|=3$,　$|B|=\sqrt{2}$　　$\because |A|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{9}$

∴ $\cos\theta = 3/3\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$　　$\therefore \theta=\pi/4$　$(-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲とすれば)

問題 3.　3.0×10^3 kg のケーブルカーが地点 A にある。地点 A から見て、その終点は水平と 30° の傾斜をなす直線の線路に沿って距離 200 m 上がったところにある。ここで重力加速度の大きさを 10 [m/s²]、ケーブルカーが線路から受ける抵抗力を 7.5×10^3 N として以下の問に答えよ。

(1) ケーブルカーを地点 A から終点まで上げるための仕事を求めよ（単位も明記すること）。

[解] ケーブルカーを終点まであげるための仕事は、質量を M[kg]、線路の長さを L[m]、重力加速度の大きさを g[m/s²]、線路からの抵抗力を F[N]として、

(a) 位置エネルギー　$MgL\sin30^\circ$ $= 3.0\times10^3\times10\times200\times1/2 = 3.0\times10^6$ J　　(説明: $L\sin30^\circ$ は終点の高さ)

(b) 線路の抵抗力に対する仕事　$FL = 7.5\times10^3\times200 = 1.5\times10^6$ J　　(説明: 抵抗力に摩擦を含む、仕事=力×距離)

の和である。(a)+(b) $= 3.0\times10^6 + 1.5\times10^6 = 4.5\times10^6$ J

(2) 仕事に 3 分 45 秒かかったとすると、仕事率はいくらか（単位も明記すること）。

[解] ここで、 3 分 45 秒 = 225 s であるから、

$$\text{仕事率} = \frac{4.5\times10^6}{225} = 2.0\times10^4 \ \text{W}$$

	番号							名前		点数	

問題 4.　平地では正確に時を刻んでいる振り子時計を標高が高い（例えば標高 2,000m）山の上に持って行くと時計が正確に時を刻まなくなる。なぜこのことが起きるかを説明せよ（注意: 気圧の変化は無関係とする）。ただし山の上では振り子時計はどのように狂うか(平地に比べて進む、もしくは遅れる）もあわせて述べよ。必要ならば、地球の質量を M,　地球の半径を R、万有引力定数を G で表してよい。

[解] 地球の質量を M, 半径を R, ある物体の質量をm、万有引力定数を G とする

物体が地表面にあるとき、受ける重力は 万有引力の法則から、 $G\frac{Mm}{R^2}$　⇒この時の重力加速度の大きさは $G\frac{M}{R^2}$

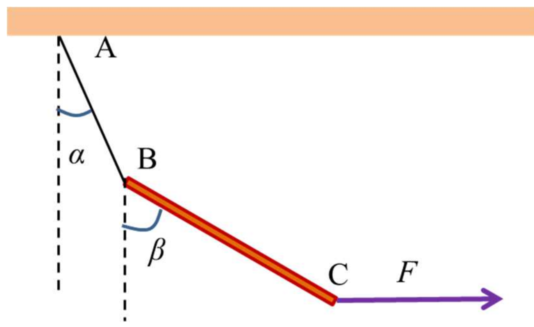
高さ H [m]の山頂にあれば、$G\frac{Mm}{(R+H)^2}$　⇒ この時の重力加速度の大きさは $G\frac{M}{(R+H)^2}$

ゆえに、H [m]の高所にあればそこでの重力加速度の大きさは地表のそれの $R^2/(R+H)^2$ となり、これは H>0 なら 1 よりも小さい

ここで、振り子時計の周期は、糸の長さ l, 重力加速度の大きさ g として、$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$で与えられる。これから、山頂では重力加速度の大きさが地表よりも小さいため、振り子の周期が長くなる(それを T'とすると、$T'>T$)。

そもそも振り子時計は、何回振り子が振れたかで時間を測るものである。例えば、地表で n 回振れたら 1 時間とするとすれば、24n 回振れれば 1 日経過したことになる。ところが、上で見たように nT' > nT である。つまり山頂の振り子時計は、地表の振り子時計が n 回振れたので 1 時間とするところを、それより多くの時間が経過してから 1 時間と判定することになる。ゆえに、山頂では遅れる。

問題 5. 右図のように、天井の A 点から軽くて伸び縮みしない長さ l [m]の糸で、密度の一様な質量 m[kg]、長さ L[m]の棒をつるし、棒の他端 C を大きさ F[N]の力で水平に引いた。この時、糸が鉛直方向となす角は α、棒が鉛直方向となす角は β であった。重力加速度の大きさを g [m/s²]とし、空気の抵抗は無視できるものとして以下の問に答えよ。



(1)糸の張力を T[N]として、棒にかかる水平方向の力のつり合い、鉛直方向の力のつり合い、および B 点回りの力のモーメントのつりあいの式をそれぞれ書け。

[解] 糸の張力を T とする。

水平方向の力のつり合い:　(1) $T\sin\alpha=F$

鉛直方向の力のつり合い:　(2) $T\cos\alpha=mg$

B 点周りの力のモーメント:　(3)　$mgL\sin\beta/2 = FL\cos\beta$

(2)角 α と角 β をそれぞれ、l, L, m, F, g のうち適切な記号を用いて表せ。

[解]　$\tan\alpha = F/mg$　　これから　$\alpha = \tan^{-1} F/mg$

$\tan\beta = 2F/mg$　　$\beta = \tan^{-1} 2F/mg$

(3)糸の張力 T[N]を l, L, m, F, g のうち適切な記号を用いて表せ。

[解]　$T^2 = F^2 + (mg)^2$

$T = \sqrt{F^2 + (mg)^2}$

別解:

$T = F/\sin(\tan^{-1}(F/mg))$

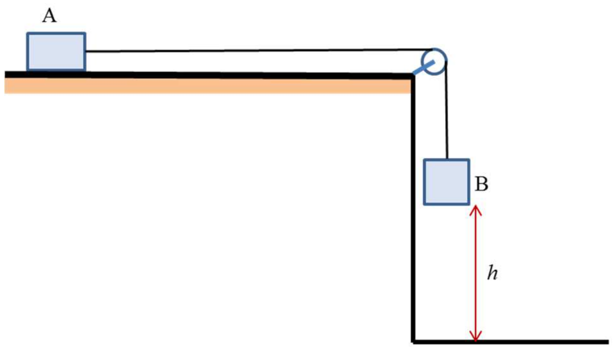
または

$T = mg/\cos(\tan^{-1}(F/mg))$

中京大学工学部電気電子工学科

学科目	物理学	出題者	白井　英俊	試験日	2014 年　6 月　2 日　月曜日　実施
注意事項	持ち込みできるものは、指定用紙のみ。解答の順番は自由である。不正行為者に対しては、物理学の単位を F とする。				

問題 6.　動摩擦係数が μ' の粗い水平の台の上に、物体 A(質量 m)が置かれ、水平な糸によりなめらかな滑車を通して鉛直につるされた物体 B(質量 M)につながれている。糸は軽くて伸びず、物体 B は床から h の高さにあるとする。糸を張って B を静かにはなしたときの A と B の運動について以下の問に答えよ。ただし、空気の抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g とする。



(1) A と B の間の糸はピンと張ってゆるみがないとする。そこで B を押さえていた手をはなしたところ、B は下降し始めた。物体 A と B の運動の方向に沿ってそれぞれ x 軸をとり、A に対しては右向きを正、B に対しては下向きを正とし、A の位置を x_A、B の位置を x_B で表わすものとする。(すると A の速度は$\frac{dx_A}{dt}$、加速度は$\frac{d^2x_A}{dt^2}$と表せる)。 糸の張力を T として、A と B の運動方程式をそれぞれ書け。

[解] A、B に働く力を書き込む (説明: 張力によって A が右向きの加速度を得る。動摩擦力は運動と逆向きにはたらく)

A の運動方程式　$T - \mu' mg = m\frac{d^2x_A}{dt^2}$

B の運動方程式　$Mg - T = M\frac{d^2x_B}{dt^2}$

(2) (1)の運動方程式と、A と B の加速度が等しいことを用いて、A と B の加速度、および糸の張力を求めよ。

[解] A と B の加速度を$\ddot{x}$ で表す。

$Mg - \mu' mg = (m+M)\ddot{x}$　　これより $\ddot{x} = (M - \mu' m)g/(m+M)$

これを用いて　$T = m\ddot{x} + \mu' mg = mM(1+\mu')g/(m+M)$

(3) B が床についたときの速度 v を求めよ。

[解]　$(M - \mu' m)g/(m+M) = a$ とおく。

$\ddot{x} = \mathrm{a}$ を積分して初期条件を考慮(時刻 t の速度を$\dot{x}(t)$、位置を $x(t)$で表す。初期条件は$\dot{x}(0)=0$,　$x(0)=0$)

$\dot{x}(t) = \mathrm{a}t$　　$x(t) = \mathrm{a}t^2/2$

これより $x(t_1) = h$ となる t_1 を求める　$t_1 = \sqrt{2h/\mathrm{a}}$

これから　$v_1 = \dot{x}(t_1) = \sqrt{2h\mathrm{a}} = \sqrt{2h\frac{(M-\mu' m)g}{m+M}}$

(4) B が床についても A はしばらく動き続けてから台上で止まった。A が滑った距離(A が動き始めてから停止するまでの距離)を μ', g, v, h を用いて表せ。

[解]　B が床につくまでに滑った距離は h

そのとき、A の速さは v である。

それから動摩擦力 $\mu' mg$ をうけて停止するのだから、動摩擦力による加速度は　$-\mu' g$

したがって、B が床についた後に A が移動した距離を x とすると、

$0^2 - v^2 = -2\mu' gx$

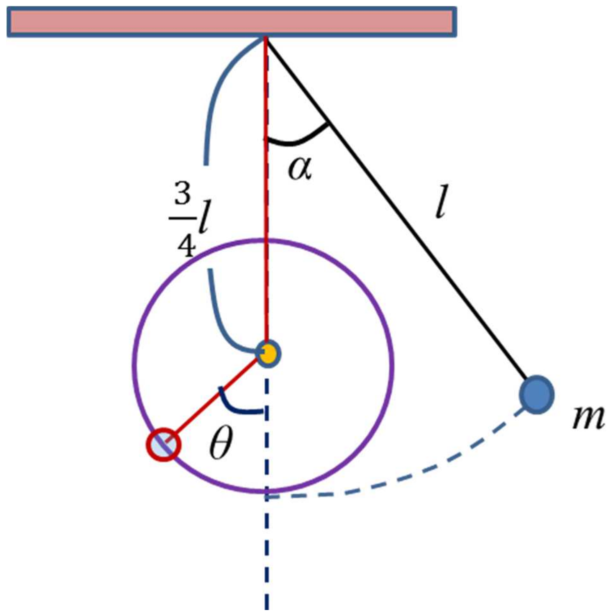
がなりたつ。これから $x = v^2/(2\mu' g)$

ゆえに、(x に h をたすことを忘れないこと)

$h + v^2/(2\mu' g)$

	番号		名前		点数

問題７　以下の問に答えよ。ただし答えだけではなく、考え方も明示すること。



軽く伸び縮みしない長さ l の糸と質量 m のおもりからなる単振り子を天井から設置した。また、糸を天井に止めている点の真下、距離 $3l/4$ だけ離れたところに釘を固定した。そして、糸がたるまないように鉛直下方と角 α をなす位置におもりを引き、そっと手を離した。ここで釘の大きさと空気の抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g とする。

糸がこの釘に巻き付くような運動をするための角 α の条件を求めよう。なお右図は参考として示したもので、おもりが左に振れて釘に糸がひっかかり、鉛直方向と角 θ をなすところまでおもりが振れた様子を表す。

(1) 手を離したときのおもりの力学的エネルギーを書け。ただし、これ以降、位置エネルギーの基準点をおもりの運動の最下点とする。

答:　最下点からの高さは、$l(1-\cos\alpha)$　　であり、運動エネルギーは０なので、

$mgl(1-\cos\alpha)$

⑵ おもりが釘を中心とした円運動になって、図の位置になったものとする。糸が鉛直方向となす角を θ、おもりの速さを v とする。このときの力学的エネルギーを m, g, l, v, θ のうちから適切な記号を用いて表せ。

答:　運動エネルギーは、$\frac{1}{2}mv^2$　　また、位置エネルギーは、$mg\frac{l}{4}(1-\cos\theta)$

であるから、その和は　$\frac{1}{2}mv^2+mg\frac{l}{4}(1-\cos\theta)$

⑶ 糸が鉛直方向となす角が θ のとき, おもりの速さを v, 糸の張力を S として、円運動の法線方向の運動方程式を m, g, l, v, S, θ のうちから適切な記号を用いて表せ。

答: 円運動の法線方向の運動方程式から: $m\frac{v^2}{\frac{l}{4}}=S-mg\cos\theta$

⑷ おもりには糸の張力と重力だけがはたらくが、糸の張力は運動に垂直に働くので、仕事をしない。よって重力のみがこの運動に対し仕事をするから、力学的エネルギー保存則がなりたつ。⑴と⑵から、糸が鉛直方向となす角が θ のときのおもりの速さ v を、m, g, l, α, θ のうちから適切な記号を用いて表せ。

答: ⑴=⑵ より、$\frac{1}{2}mv^2+mg\frac{l}{4}(1-\cos\theta)=mgl(1-\cos\alpha)$

$v^2+\frac{1}{2}gl(1-\cos\theta)=2gl(1-\cos\alpha)$

これから $v^2=\frac{1}{2}gl(3+\cos\theta-4\cos\alpha)$　　ゆえに、$v=\sqrt{\frac{1}{2}gl(3+\cos\theta-4\cos\alpha)}$

(5) ⑶, ⑷の結果から、糸の張力 S を m, g, l, α, θ のうちから適切な記号を用いて表せ。

答: ⑶から $S=\frac{4mv^2}{l}+mg\cos\theta$　　　これに⑷のv^2の値を代入して、

$S=mg(6-8\cos\alpha+2\cos\theta)+mg\cos\theta$

$=mg(6-8\cos\alpha+3\cos\theta)$

⑹ 糸がこの釘に巻き付くような運動をするための角 α の条件を求めよ。（ヒント: 円運動が実現されれば、糸が釘に巻き付く. そのためには、S と v はどのような値でなければならないか？）

答:　糸が釘に巻きつくには、円運動が実現されればよい。それには、どの θ の値に対しても、$S≧0$ かつ $v^2≧0$ であればよい。

ここで、S とv^2 の最小値は $\theta=\pi$のときであるから、

$v^2\geq 0$より $2-4\cos\alpha\geqq 0$、　　$S\geq 0$ より $3-8\cos\alpha\geqq 0$

つまり　$1\geqq 2\cos\alpha$　かつ、$3\geqq 8\cos\alpha$

よって　$3/8\geqq\cos\alpha$　　　　つまり　$\alpha\geqq\cos^{-1}(3/8)$