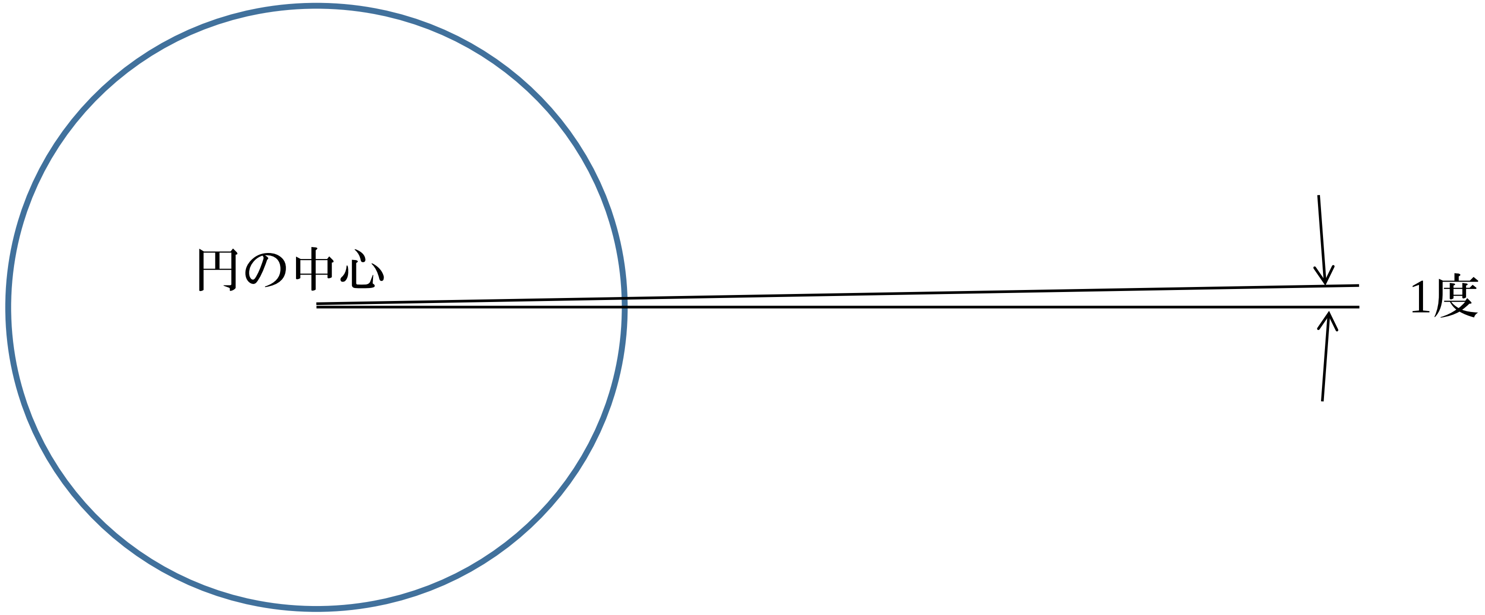
三角関数の基礎知識

1. 度数法と弧度法

- 角度の測り方

(1) 度：円周を360等分した弧を持つ扇形の中心角を単位とする

1周は360°



1. 度数法と弧度法

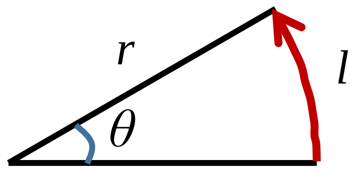
- 角度の測り方

  (1) 度：円周を360等分した弧を持つ扇形の中心角を単位とする

  (2) ラジアン(rad)：弧の長さlを半径rで割った値を単位とする

  1周は2π [rad]

$$\theta = \frac{l}{r}$$

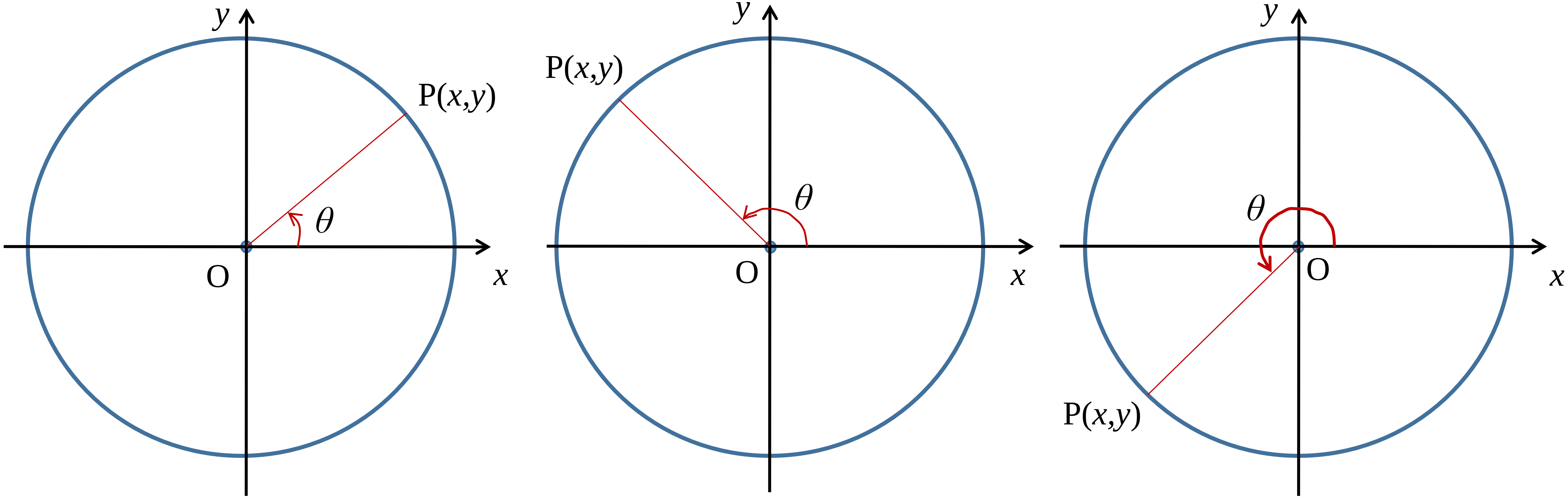


問1. 1 rad は何度か？
問2. 360° は 何rad か？

2. 三角関数

位相

半径 r の円周上に点Pがあり、x軸とOPとのなす角をθ [rad]とする



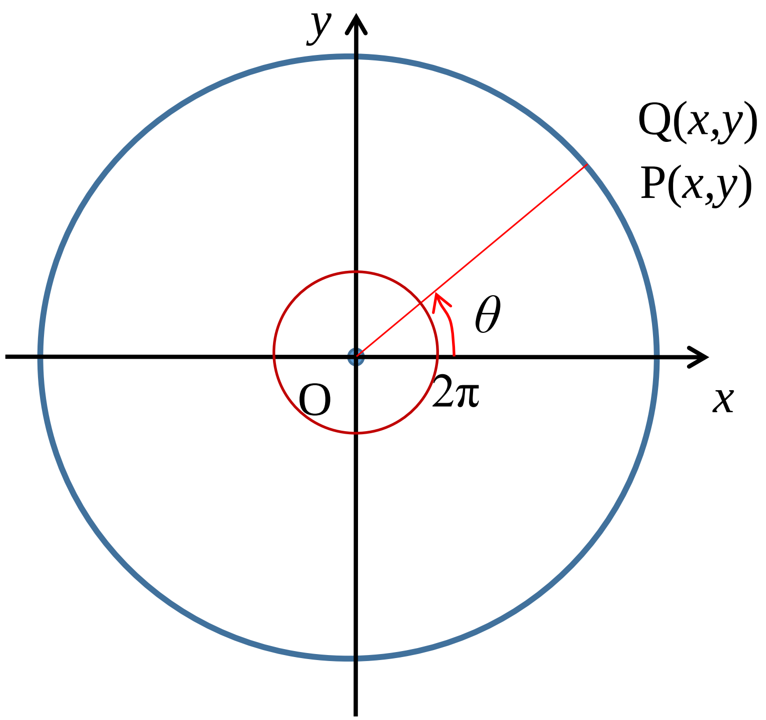
$\cos\theta = \frac{x}{r}$　　$\sin\theta = \frac{y}{r}$　　$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$x \geqq 0, y \geqq 0$ だから
$\sin\theta \geqq 0, \cos\theta \geqq 0, \tan\theta \geqq 0$

$x < 0, y \geqq 0$ だから
$\sin\theta \geqq 0, \cos\theta < 0, \tan\theta < 0$

$x < 0, y < 0$ だから
$\sin\theta < 0, \cos\theta < 0, \tan\theta > 0$

三角関数の基本性質1



$\cos\theta = \frac{x}{r}$　　$\sin\theta = \frac{y}{r}$　　$\tan\theta = \frac{y}{x}$

Q点の位相 $\varphi = \theta + 2\pi$ のとき、

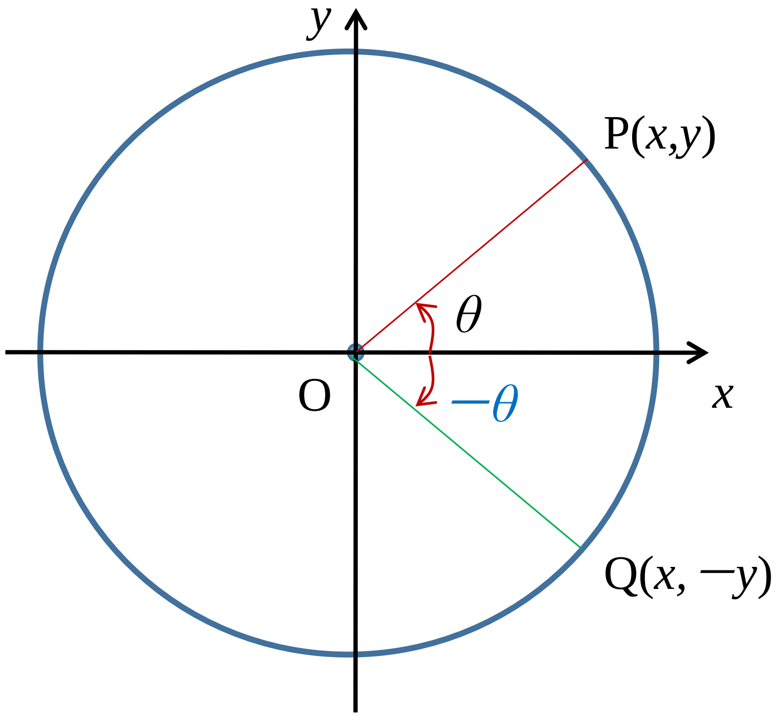
Q点のx座標もy座標も
位相がθのP点と等しい

$$\Rightarrow \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 2\pi) = \tan\theta$$

より一般的に、nを整数とすると、

$$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$$
$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$$
$$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$$

三角関数の基本性質2

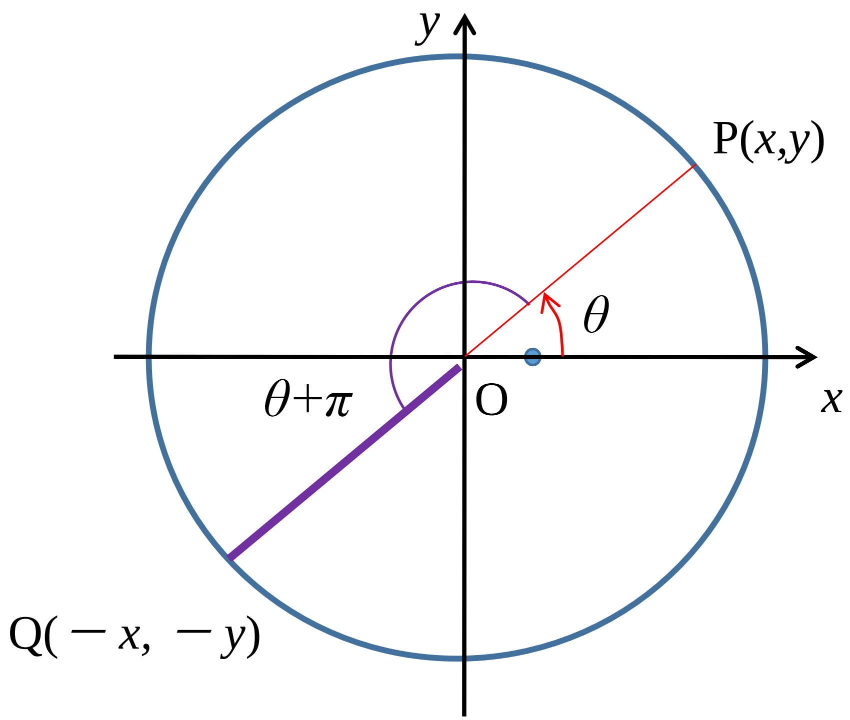


点Pがあり、x軸とOPとのなす角をθ [rad]とする
点Qも x軸とOQとのなす角がθ [rad]だが、
P点はx軸から反時計回りにθ [rad]
Q点はx軸から時計回りにθ [rad]の点とする

これを「負の値」として $-\theta$ で表す：Q点の位相は$-\theta$

Q点はP点と比べ
x座標の値は等しい
y座標は負（絶対値は等しい）
$\Rightarrow$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

三角関数の基本性質3



Q点の位相 $\varphi = \theta + \pi$のとき、

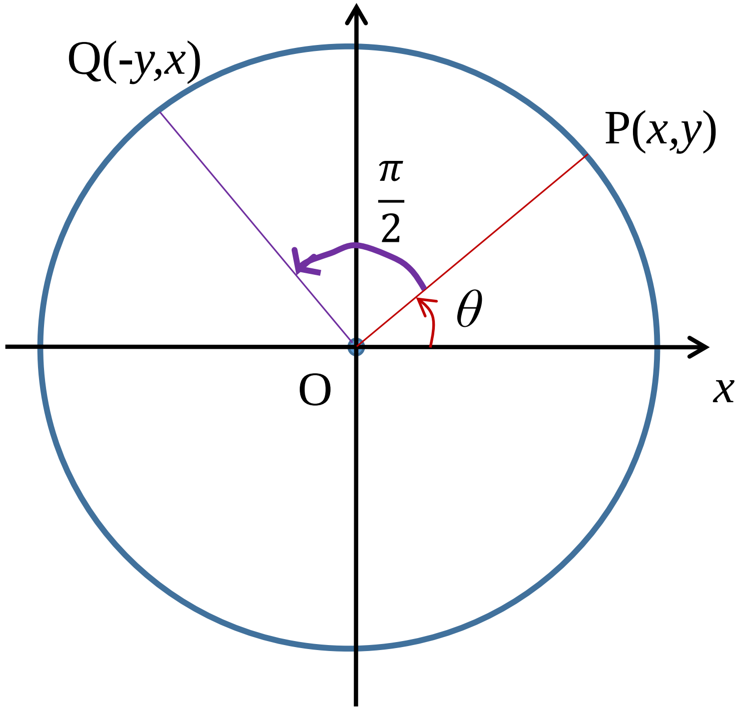
Q点のx座標とy座標は
位相がθ のP点の座標を負にしたもの

$\Rightarrow$ $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$

三角関数の基本性質4



Q点の位相 $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ のとき、
位相がθ のP点の座標を(x, y)とすると

Q点のx座標 = $-\ y$
y座標= x

$\Rightarrow$ $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\ \sin\theta$
$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$
$\tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\theta} = -\cot\theta$

三角関数の基礎問題

1. $\theta = \frac{\pi}{3}$ とする。以下を求めよ:

(1) $\cos\theta, \quad \sin\theta, \quad \tan\theta$

(2) $\cos(\theta+\pi), \quad \sin(\theta+\pi), \quad \tan(\theta+\pi)$

(3) $\cos(\theta+\frac{\pi}{2}), \quad \sin(\theta+\frac{\pi}{2}), \quad \tan(\theta+\frac{\pi}{2})$

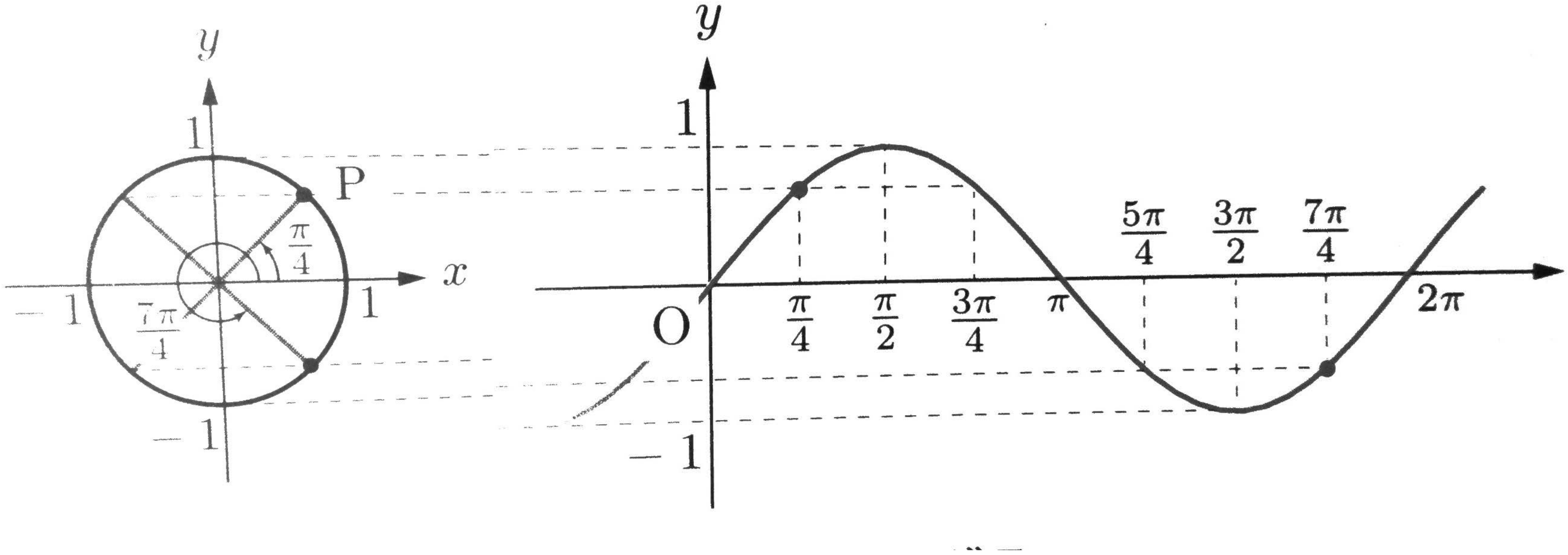
(4) $\cos(\theta-\frac{\pi}{2}), \quad \sin(\theta-\frac{\pi}{2}), \quad \tan(\theta-\frac{\pi}{2})$

2. 以下を示せ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta, \ \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta, \ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$$

三角関数のグラフと値域

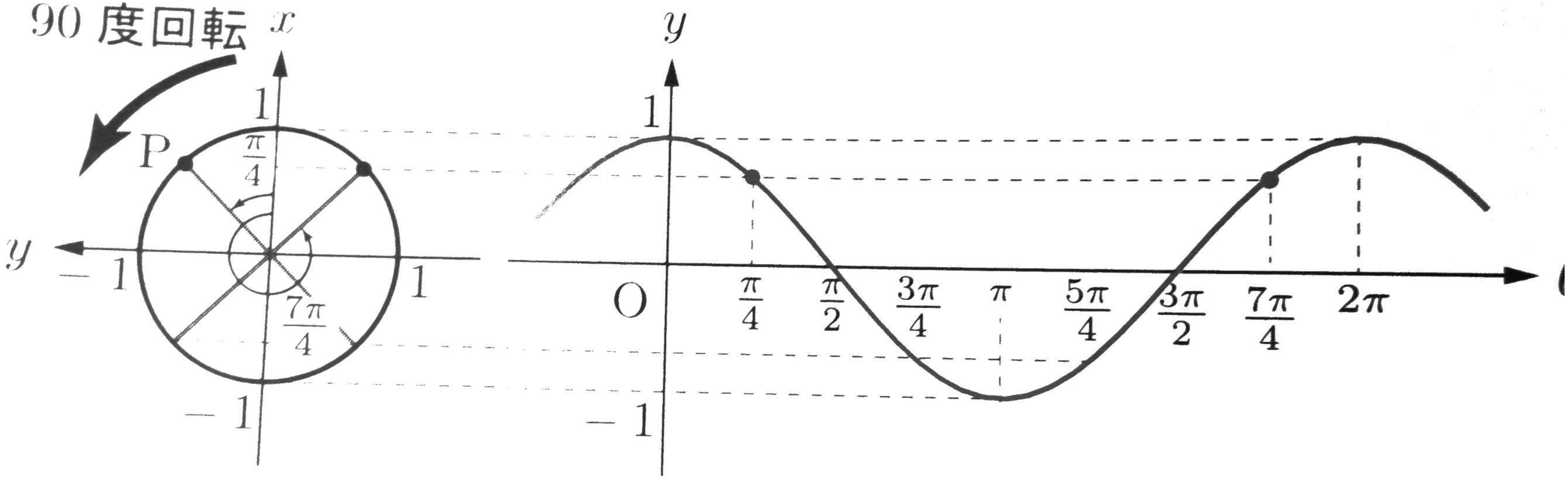
(1) $\sin\theta$　のグラフ ：取りうる値は $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$
$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ だから、2πごとに同じ値を取る⇒周期関数



(2) $\cos\theta$　のグラフ：取りうる値は $-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$

$\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$ だから、sinと同様2πごとに同じ値を取る周期関数

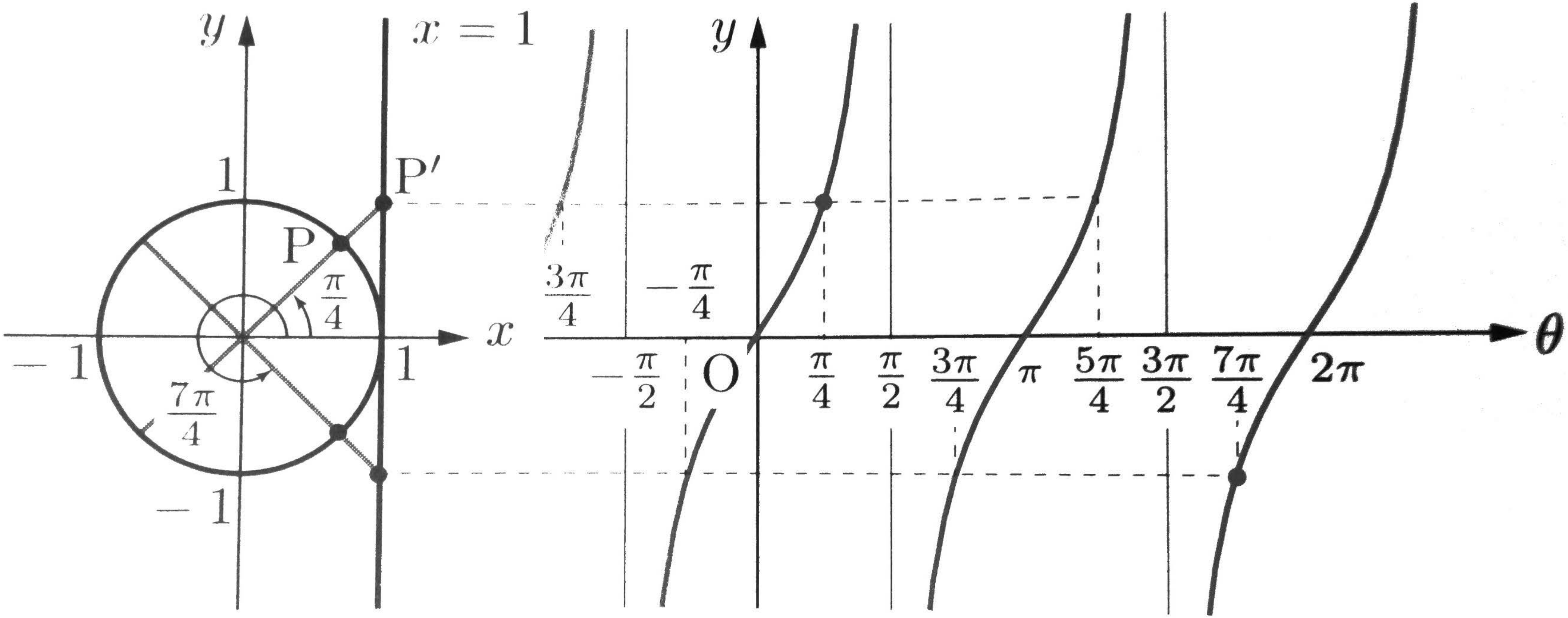
$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ だからsinのグラフを$\frac{\pi}{2}$だけシフトしたグラフ



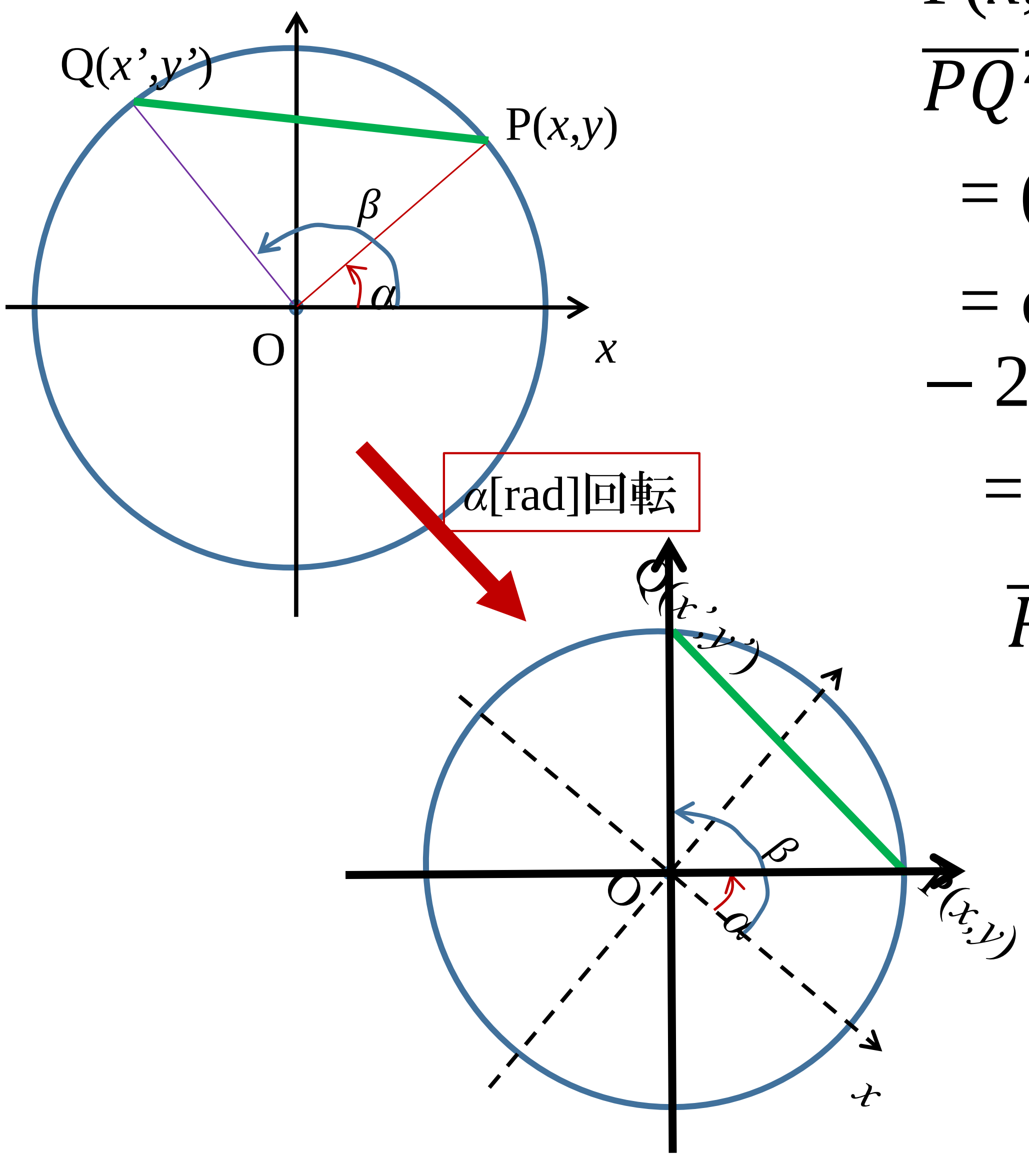
(3) $\tan\theta$　のグラフ ：取りうる値は$-\infty \leqq \tan \leqq \infty$

$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ だから、πごとに同じ値を取る周期関数

nを整数とすると、$\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ においてtanθ の値は不定



加法定理



単位円上でx軸からα[rad]回転させた点 P(x,y)と、β[rad]回転させた点Q(x’,y’)

$$\overline{PQ}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

$$= 2 - 2\left(\boxed{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}\right)$$

$$\overline{PQ}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$= (\cos(\beta - \alpha) - 1)^2 + (\sin(\beta - \alpha) - 0)^2$$

$$= \cos^2(\beta - \alpha) - 2\cos(\beta - \alpha) + 1 + \sin^2(\beta - \alpha)$$

$$= 2 - \boxed{2\cos(\beta - \alpha)}$$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

加法定理(続)

$\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

ここで $\cos(-\theta) = \cos\theta$ だから

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

ここで$\beta \to -\beta$ とすると

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$

$\quad = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

さらに $\beta \to \frac{\pi}{2} + \beta$ とすると$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$, $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ から

$-\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos(\frac{\pi}{2} + \beta) - \sin\alpha\sin(\frac{\pi}{2} + \beta)$

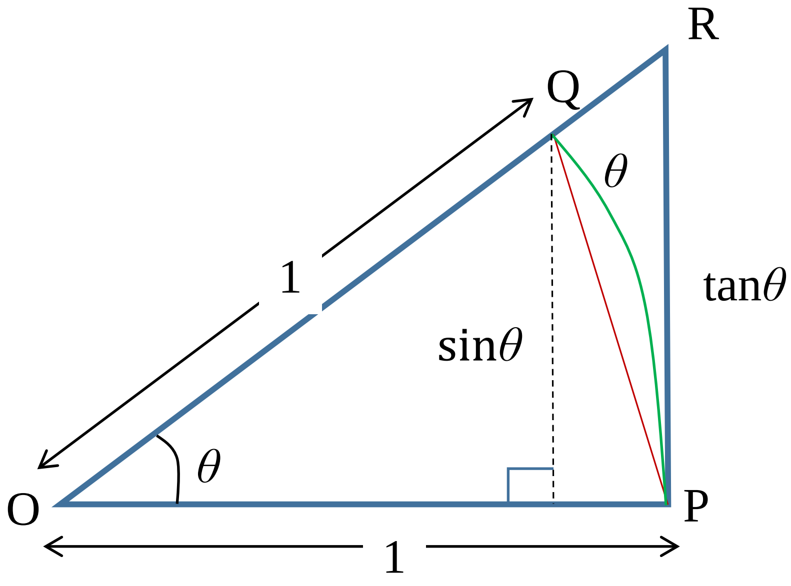
$\quad = -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$

よって $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

同様に $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

三角関数の微分と積分

(1) $\frac{\sin\theta}{\theta}$ の$\theta\rightarrow 0$の極限



左図のように、半径1で中心角θ[rad] の扇形OPQを考える
内側には直角三角形 OPQがある

面積を考えると△OPQ < 扇形OPQ < △OPR である
また

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} 1 \times \sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$扇形OPQ = \frac{1}{2}\theta \times 1^2 = \frac{1}{2}\theta$$

$$\triangle OPR = \frac{1}{2} 1 \times \tan\theta$$

$$\therefore \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

$\sin\theta$ でわると $1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$ $\Rightarrow \cos\theta > \frac{\sin\theta}{\theta} > 1$

この$\theta\rightarrow 0$の極限 を考えると$\cos\theta \rightarrow 1$なので、$\frac{\sin\theta}{\theta}\rightarrow 1$ が言える

三角関数の微分と積分

(2) y=sin x　の導関数

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-sin x}{h}$$

ここで加法定理から　sinA－sinB = 2cos($\frac{A+B}{2}$)sin($\frac{A-B}{2}$)

これを用いると　$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)sin\frac{h}{2}}{h}$ = $\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

ここで$\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$=cos$x$, $\lim_{h\to 0}\frac{sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$ = 1 より　$\frac{d\sin x}{dx}$ = cos$x$

三角関数の微分と積分

(3) $y=\cos x$ の導関数

$\cos x = \mathrm{sn}(x+\frac{\pi}{2})$ より $y=\sin X$, $X=x+\frac{\pi}{2}$ とする合成関数の微分を行う

$$\frac{d\cos x}{dx} = \frac{dy}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = \cos X \cdot 1 = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

三角関数の微分と積分

(4) y=tan x　の導関数

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$ であるから

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{cos^2 x}$$

三角関数の微分と積分

それぞれの三角関数の導関数より、積分定数をCとして、不定積分は以下のようになる:

$$\int \sin x \, dx = - \cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

演習問題

1. σを度数法による度とする。$\lim_{\sigma\to 0}\frac{sin\sigma}{\sigma}$ を求めよ
2. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin\theta = \frac{1}{3}$ とする。
   (1) $\sin 2\theta$　の値を求めよ
   (2) $\cos 2\theta$　の値を求めよ

3. 次の条件が成り立つとき、$\cos(\alpha\text{-}\beta)$の値を求めよ

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2} \qquad \cos\alpha + \cos\beta = \frac{1}{3}$$

4. 次の関数の導関数をそれぞれ求めよ。

(1) $\tan^2 x$　(2) $\sin^3 x$　(3) $\frac{1}{1+\cos x}$