

学籍番号 _____

氏名 _____

前提知識: わからなければ教科書で調べること 力学的エネルギー保存則、運動量保存則

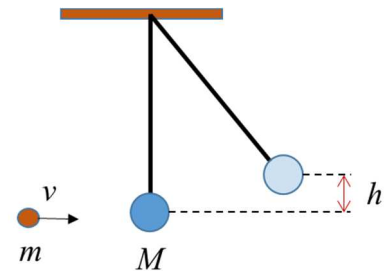
問題 1. 質量 m [kg] のボールを高さ H [m] のところで手を静かにはなし真下に落としたり、床で跳ね返り、高さ h [m] ($h \leq H$) まで到達した。このことから、ボールと床の反発係数(はねかえり係数)の値を求めよ。ただし重力加速度の大きさを g [m/s²] とし、空気抵抗は無視できるものとする。

解答: ボールと床の反発係数を e とおく。

ボールが床に接触する直前の速さ $v = \sqrt{2gH}$ [m/s] である。これにより跳ね返った直後の速さは ev と表され、これにより跳ね返り後の最高点 $h = (ev)^2/(2g)$ と表される。

このことから、 $h = (e\sqrt{2gH})^2/(2g) = e^2H$ となる。∴ $e = \sqrt{h/H}$

問題 2. 質量 M [kg] の砂袋が天井から軽く伸び縮みしない糸でつり下げられている。いま、水平方向から質量 m [kg] の弾丸を最下点に静止している砂袋に打ち込んだところ、弾丸は砂袋と一体となって図のように高さ h [m] のところまで上がった。衝突直前の弾丸の速さを v [m/s] として、高さ h [m] を求めよ。ただし空気抵抗は無視できるものとし、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



解答: 弾丸と砂袋を一つの質点系とみなす。これには外力として重力と糸の張力だけがはたらく。張力は運動と垂直にはたらくので影響を及ぼさない。衝突がきわめて短い時間でおきることを考えると、重力の影響も無視できる。したがって、衝突前後で、運動量保存の法則が成り立つと考える。

衝突直後の一体となった弾丸と砂袋の速さを v' とすると、運動量保存の法則から

$$mv = (M+m)v' \quad \text{これから } v' = mv/(M+m) \quad \text{——— ①}$$

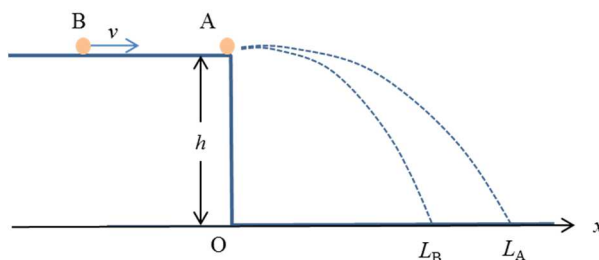
衝突後の運動では、力学的エネルギー保存則が成り立つ。つまり、衝突直後の位置を位置エネルギーの基準点にとれば

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2 = (M+m)gh \quad \text{これから } h = \frac{v'^2}{2g} \quad \text{——— ②}$$

$$\text{①、②から } h = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{m}{M+m} \right)^2$$

問題 3 右図のように高さ h [m] の水平でなめらかな台の上に小球 A を置く。そして A に向かって小球 B を速さ v [m/s] で衝突させる。この後 A と B は台から水平に飛び出し、台の端の位置を原点とす

る x 軸上の水平面に落下した。このとき、A と B は同じ鉛直面内を運動し、落下位置はそれぞれ原点から L_A [m], L_B [m] であったとする。ここで重力加速度の大きさを g [m/s^2]、空気抵抗は無視できるものとする。



(1) 衝突後の A と B の速さをそれぞれ求めよ。

解答: 衝突後の A と B の速さをそれぞれ v_A [m/s], v_B [m/s] とする。A も B も同じ時刻に落下すると考えられるので、落下に要する時間を t [s] とすると、

$$v_A t = L_A, \quad v_B t = L_B \text{ となる。}$$

また、これは高さ h [m] から床に落ちた時間であるので、 $h = \frac{1}{2} g t^2$ である。これから、

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ [s]} \text{ と求まる。} \therefore v_A = L_A \sqrt{\frac{g}{2h}} \text{ [m/s]}, \quad v_B = L_B \sqrt{\frac{g}{2h}} \text{ [m/s]}$$

(2) A と B の衝突における反発係数の値を求めよ。

解答: 反発係数の値を e とおくと、

$$v_A - v_B = e v \text{ がなりたつ。}$$

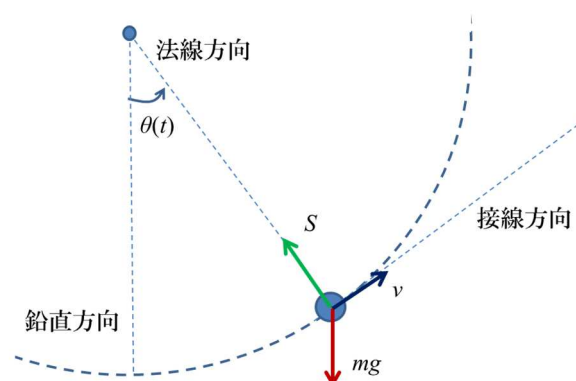
$$\therefore e = \frac{v_A - v_B}{v} = \frac{(L_A - L_B)}{v} \sqrt{\frac{g}{2h}}$$

問題 4. 微分方程式 $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$

が $x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ (C_1 と C_2 は初期条件によって定まる) という一般解を持つことを前提として、以下の間に答えよ。

天井の一点から長さ l [m] の糸を垂らし、その先に質量 m [kg] の質点をつけ、鉛直面内で微小振動させる。この単振り子の運動の周期

が $2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ [s] で与えられることを示せ。ただし、重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。



ヒント: 質点の速度を v [m/s]、回転角を θ [rad] とすると、 $v = l \frac{d\theta}{dt}$ と書ける)

解答: 質点の運動の運動方程式は、質点の速度を v [m/s]、回転角を θ [rad] とすると、

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \sin \theta \text{ と表せる。ここで } v = l \frac{d\theta}{dt} \text{ と書けることから、} l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$

また θ が小さい時 $\theta \cong \sin \theta$ であるので、 $\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta$ とかける。ここで $\omega^2 = \frac{g}{l}$ とすると、この一般

解は $x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$ と表される。ここで $t=0$ のときの初期値 ($\dot{\theta}=0$) から、

$C_2=0$ となるので、 $x = C_1 \sin \omega t$ と表される事がわかる。ゆえに、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ [s] である