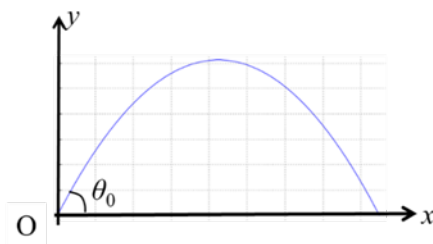


学籍番号 _____

氏名 _____

問題1. 時刻 $t=0$ において、小物体を地表面の一点 O から、水平方向と θ_0 の角をなす方向に速さ v_0 [m/s]で投げた($0 < \theta_0 < \pi/2$)。右図のように、 O を原点とし、地面に平行方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとって、小物体の位置を表すものとする。この小物体が地表に落ちるまでの運動を考えよう。



(1) 時刻 t における小物体の x 軸方向の加速度 ($\frac{d^2x}{dt^2}$) を答えよ。

解答: x 軸方向には力が働かないので $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ [m/s²]

(2) 時刻 t における小物体の y 軸方向の加速度 ($\frac{d^2y}{dt^2}$) を答えよ。

解答: y 軸方向には重力が働く。 $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ [m/s²]

(3) 時刻 t における小物体の x 軸方向の速度 ($\frac{dx}{dt}$) を答えよ。

解答: (1)より $\frac{dx}{dt} = \int \frac{d^2x}{dt^2} dt = 0 + C$ (C は積分定数) $t=0$ のときの x 軸方向の速さが $v_0 \cos \theta_0$ であるから $C = v_0 \cos \theta_0$ $\therefore x$ 軸方向の速度は $v_0 \cos \theta_0$ [m/s]

(4) 時刻 t における小物体の y 軸方向の速度 ($\frac{dy}{dt}$) を答えよ。

解答: (2)より $\frac{dy}{dt} = \int \frac{d^2y}{dt^2} dt = -gt + C$ (C は積分定数) $t=0$ のときの y 軸方向の速さが $v_0 \sin \theta_0$ であるから $C = v_0 \sin \theta_0$ $\therefore y$ 軸方向の速度は $-gt + v_0 \sin \theta_0$

(5) 時刻 t における小物体の x 軸方向の位置 (x) を答えよ。

解答: (3)より $x = \int \frac{dx}{dt} dt = v_0 t \cos \theta_0 + C$ (C は積分定数) $t=0$ のとき $x=0$ より $v_0 t \cos \theta_0$ [m]

(6) 時刻 t における小物体の y 軸方向の位置 (y) を答えよ。

解答: (4)より $y = \int \frac{dy}{dt} dt = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta_0 + C$ (C は積分定数)

$$t = 0 \text{ のとき } y = 0 \text{ より } -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta_0 \text{ [m]}$$

(7) (6)において $y=0$ として、地表に小物体が落ちる時刻 t [s]を求める。それにより、小物体が地表におちた x 軸方向の位置を答えよ。

解答: $-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \theta_0 = 0$ の解 $t=0, \frac{2}{g} v_0 \sin \theta_0$ 文意から $t > 0$ より、 $t = \frac{2}{g} v_0 \sin \theta_0$ [s]

この値と(5)の結果から $x = \frac{2}{g} v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{1}{g} v_0^2 \sin(2\theta_0)$ [m]

ポイント

(1) 運動の方向(水平方向、鉛直方向)ごとに運動方程式をつくる

(2) 運動方程式：(質量 m , 加速度 a)

$$m a = \text{力の総和}$$

力の総和=0 ならつり合い $\Rightarrow a=0$

(8) (4)=0 として、小物体が最高点に達する時刻 t [s] を求めよ。また、最高点における小物体の位置(x 座標と y 座標)を答えよ。

解答: $\frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin \theta_0 = 0$ より $t = \frac{1}{g} v_0 \sin \theta_0$ [s] これを(5),(6)に代入

$$x \text{ 座標: } \frac{1}{g} v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin(2\theta_0) \quad [\text{m}]$$

$$y \text{ 座標: } -\frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \theta_0 + \frac{1}{g} v_0^2 \sin^2 \theta_0 = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \theta_0 \quad [\text{m}]$$

ポイント

三角関数 の公式

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

問題 2. 上の結果から、空気の抵抗が無視できる場合、小物体を最も遠くに飛ばすには、どの角度で投げたらよいかを答えよ。

解答: 問題 1(7)より小物体が地表に落ちた x 座標の値は $x = \frac{1}{g} v_0^2 \sin(2\theta_0)$ で与えられる。

この最大値は g, v_0 が定数であることから $\sin(2\theta_0)$ が最大となるとき、つまり $2\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ のときである

$$(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}). \therefore \theta_0 = \frac{\pi}{4} \quad [\text{rad}]$$

ポイント

三角関数 の常識 ($-\pi \leq \theta \leq \pi$ とすると)

$\sin \theta$ の最大値は 1 ($\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき)、最小値は -1 ($\theta = -\frac{\pi}{2}$ のとき)

$$\sin 0 = \sin \pi = 0 \quad \sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5}{6} \pi = \frac{1}{2} \quad \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2}{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta \quad \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \cos \theta$$

問題 3 水平面上に半径 r [m] の円周がある。その一点から初速 0 m/s で時刻 $t = 0$ に出発した質点が、1 秒あたり α [m/s²] の割合でその速さを増しながら円周上を運動している。摩擦は無視できるとして、時刻 t [s] における質点の(1)速さと、(2)加速度の大きさをそれぞれ答えよ。

ヒント: 円運動している質点は円の中心方向と接線方向の加速度を持つ。(2)で問われているのは、この2つの加速度(ベクトル)を合成したものの大きさである。

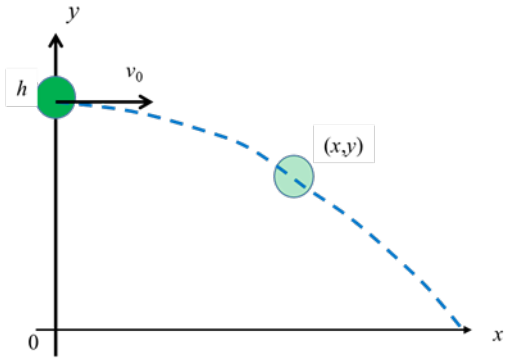
解答: (1) 問題文より加速度が α [m/s²] であることと初速 0 m/s であることから

$$\text{時刻 } t \text{ における回転の速さ } v = at \quad [\text{m/s}]$$

(2) 加速度の大きさは、円の接線方向の α [m/s²] と向心方向の $\frac{v^2}{r} = \frac{(\alpha t)^2}{r}$ との合成

$$\text{よって } \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{(\alpha t)^2}{r}\right)^2} = \frac{\alpha}{r} \sqrt{r^2 + \alpha^2 t^4} \quad [\text{m/s}^2] \quad (\text{注意: 次元を確認せよ})$$

問題 4. 図のように、時刻 $t = 0$ において質量 $m[\text{kg}]$ の小物体を地表 $h[\text{m}]$ の高さの点から速さ $v_0[\text{m/s}]$ で水平方向に投げた。この小物体が地表に落ちるまでの運動を問う。ただし、地面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとって小物体の位置を表す。また、空気の抵抗が、小物体の速度に比例するものとし、空気抵抗の比例係数を k とする。



(1) 時刻 $t \geq 0$ における運動の x 成分と y 成分、それぞれの運動方程式を答えよ。

ヒント: 運動においては x 方向(この問題では水平方向)の位置、速度、加速度と、 y 方向(この問題では鉛直方向)の位置、速度、加速度を別の記号で表して扱うこと。

解答: x 方向は空気抵抗の力が運動と逆向きにはたらく: 運動方程式: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}$

なお $\frac{dx}{dt} = v_x$ で表して $m \frac{dv_x}{dt} = -kv_x$ でもよい

同様に y 方向には重力と空気抵抗がはたらく:

運動方程式: $m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k \frac{dy}{dt}$

なお $\frac{dy}{dt} = v_y$ で表して $m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y$ としてもよい

ポイント

(空気)抵抗は、運動と逆向きに働く
物体が落下するとき、 $v_y < 0$
空気抵抗(f とする)は上向き
だから $f = -kv_y$ とすれば、+
方向の力(上向き)を表す!

(2) 時刻 $t \geq 0$ におけるこの物体の速度の x 成分 v_x と y 成分 v_y を表すそれぞれの式を答えよ。

解答: (1)の式を解く。

速度の x 成分 v_x : $\frac{1}{v_x} \frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}$ 両辺を t で積分 $\int \frac{1}{v_x} \frac{dv_x}{dt} dt = \int -\frac{k}{m} dt$

これより $\log v_x = -\frac{k}{m} t + C$ (C は積分定数) となるので $v_x = C' \exp(-\frac{k}{m} t)$ (ここで $C' = \exp(C)$)

初期条件 $v_x(0) = v_0$ であるから、 $C' = v_0$ $\therefore v_x = v_0 \exp(-\frac{k}{m} t)$ [m/s]

速度の y 成分 v_y : $m \frac{dv_y}{dt} = -mg - kv_y = -k(v_y + mg/k)$ から $\frac{1}{v_y + mg/k} \frac{dv_y}{dt} = -\frac{k}{m}$

両辺を時間 t で積分 $\log(v_y + mg/k) = -\frac{k}{m} t + C$ (C は積分定数)

これより $v_y + \frac{mg}{k} = C' \exp(-\frac{k}{m} t)$ (ここで $C' = \exp(C)$)

初期条件 $v_y(0) = 0$ であるから $C' = \frac{mg}{k}$ $\therefore v_y = \frac{mg}{k} (\exp(-\frac{k}{m} t) - 1)$ [m/s]

(3) h がとても大きい場合は地表面に落ちることなく運動が続く。その状況において、とても長い

時間がたった時の速度（終速度）を答えよ。

(2) の答に対しての極限值を考える

$$x \text{ 方向: } \lim_{t \rightarrow \infty} v_x = \lim_{t \rightarrow \infty} v_0 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right) = 0 \text{ [m/s]}$$

$$y \text{ 方向: } \lim_{t \rightarrow \infty} v_y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{mg}{k} (\exp(-\frac{k}{m}t) - 1) = -\frac{mg}{k} \text{ [m/s]}$$

おまけの問題： 谷の深さを調べるため、崖から静かに小石を落としたところ 15 [s] 秒後に音が聞こえた。空気抵抗は無視でき、重力加速度の大きさを 10 m/s²、音速を 340 m/s として、崖から谷底までの長さを求めよ。

解答： 谷の深さを x [m]、小石が落ちるまでの時間を t [s] とおく。

$$x = \frac{1}{2} \times 10t^2 \quad (1)$$

$$15 = t + x/340 \quad (2)$$

(1),(2) から $15 = t + (5/340) t^2$

$$t^2 + 68t - 1020 = 0$$

これを解いて、 $t = 12.6$ ($t > 0$ より)

$$\therefore x = 793.8 \quad \text{答: } 7.9 \times 10^2 \text{ m}$$