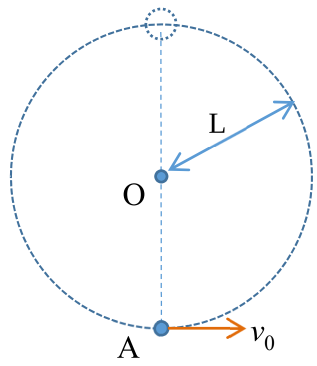
学籍番号　　　　　　　　　　　氏名

問題 1　なめらかな水平面内を、点 O を中心として小物体 A が等速円運動している。回転半径を L[m], A の速さは v_0 [m/s]とする。以下の問いに答えよ。　教科書 5.3 等速円運動 (p.66)



(1) A は T[s] 間にどのくらいの距離を進むか、答えよ。

答:　A の速さは v_0 [m/s]だから, v_0T [m]

(2) A は T[s] 間に何回転するか、答えよ。

答:　T[s] 間に進む距離を円周 $2\pi L$ で割れば良い：$v_0T/(2\pi L)$

(3) A の角速度を求めよ。

答: (2)から 1s に回転する角を出せば良い： $2\pi\times v_0/(2\pi L)= v_0/L$ [rad/s]

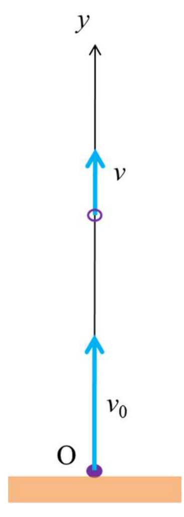
(4) A の周期を求めよ。

答: (3)の角速度から $2\pi/(v_0/L) = 2\pi L/ v_0$ [s]　(2)の答(周期)も求められる

(5) これは「等速円運動」の一つであるが、「等速度円運動」というのはありえない。その理由を述べよ。

答:　「等速度」であるとは、同じ速さ(等速)だけではなく向きも変わらないことである。

しかし円運動するには、つねに円の接線方向から円の中心の方へ向きが変化し続けなければならない。よって、向きが変わらない「等速度」では円運動にはならない



問題 2. 質量 m[kg]の小物体 A が地表上の点 O から速さ v_0[m/s]で鉛直上向きに投げ上げられた。A が投げ上げられてから t 秒後(ただしその時点では A は O 点もしくは空中にあるとする)の A の鉛直方向の速度と位置を求めたい。ただし点 O を原点とし、鉛直上方に y 軸を取るものとする。また A は重力加速度の大きさ g [m/s^2]の一様な重力と、**速度に比例した空気の抵抗**(空気抵抗の比例定数は k とする)とを受けて運動するものとする。

(1) 小物体 A の y 軸方向の運動方程式を書け。ここで$v(t) = \frac{dy}{dt}$ を用い、また$v(t)$を v と略してもよい。

教科書 問 23 (p.88)

答: $m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \; - k\frac{dy}{dt}$

または $m\frac{dv}{dt} = -mg \; - kv$

(2) 初期条件(t=0 における小物体の位置と速度)を考慮して(1)の微分方程式を解け(時刻 t [s] (t ≧0) における速度と位置の式を答えよ)

答: $\frac{dy}{dt} = v$ **とおくと、(1)は** $\frac{dv}{dt} = -\left(g + \frac{k}{m}v\right) = -\frac{k}{m}(v + \frac{mg}{k})$ **と書き換えられる**

$\frac{1}{v+\frac{mg}{k}}\frac{dv}{dt} = \; -\frac{k}{m}$ 両辺を t で積分: $\log(v + \frac{mg}{k}) \; = \; -\frac{k}{m}t + C$ より $v + \frac{mg}{k} = \mathrm{C}'\exp(-\frac{k}{m}t)$

t=0 のとき v= v_0から、$v_0 + \frac{mg}{k} = \mathrm{C}'$ $\quad\therefore\; v = \frac{dy}{dt} = (v_0 + \frac{mg}{k})\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - \frac{mg}{k}$

両辺を t で積分: $\mathrm{y} = -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)\exp\left(-\frac{k}{m}t\right) - \frac{mg}{k}t + C$ $\quad$ t=0 のとき y=0 から

$\therefore\; y = \frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)(1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)) - \frac{mg}{k}t$

問題 3. **以下では重力加速度の大きさを** g [m/s^2] **とせよ。なお、**$a > 0$ とし、空気抵抗は無視できるとする。 教科書 10.1 並進座標系での運動法則 (p.121 -125)

(1) 加速度 a [m/s^2]で上昇中のエレベータにおいて、天井から質量 m [kg] のおもりが糸でつるされているとき、糸の張力を求めよ。ただしその考え方について解説をつけること。

答: 加速度 a [m/s^2]で**上昇中であるから、エレベータ内のおもりには、重力**$-mg$[N]**と見かけの力** $-m\,a$[N]がはたらいている。ゆえに、糸の張力は $mg + m\,a = m(g+a)$ [N]

(2) 加速度 a [m/s^2]で直線上を等加速度運動している電車において、天井から質量 m [kg]のおもりが糸でつるされているとき、糸の張力を求めよ。ただし解説をつけること。

答: 加速度 a [m/s^2]で直線上を等加速度運動しているので、おもりには、鉛直下向きに**重力**$-mg$[N]**と、水平面内で電車の進行方向逆向きに見かけの力** $-m\,a$[N]がはたらいている。

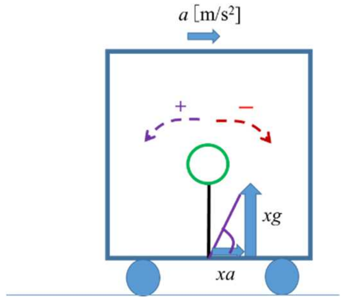
よって、糸の張力はこの合力と等しい。$\therefore \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2} = m\sqrt{g^2 + a^2}$ [N]

(3)加速度 a [m/s^2]で直線上を等加速度運動している電車において、周囲の空気よりもはるかに軽いバルーンが床から糸でつながれているとき、床と糸のなす角度を求めよ。ただし糸の質量とバルーンの質量は無視できるものとする。また鉛直上方向を 0 度、進行方向をマイナス、進行方向と逆方向をプラスの角度とする。そうなる理由も述べること。

答: これは(2)と似た状況であるが、重力に由来する浮力は鉛直上向き、かつ見かけの力が「水平面内で電車の進行方向と同じ向きに」働くという違いがある。バルーンの場合、周りの空気よりも軽いため、浮力の原理が働く（周囲の空気から押し上げられる力）

よって鉛直上方、進行方向であるため　$-\arctan(g/a)$

(注：右図で x とあるのはバルーンと同体積の空気の質量とバルーンの質量の差)



問題 4. 積み荷を含めて全体の質量 264kg の気球が鉛直上方に上昇している。重力加速度を 9.8 m/s² として以下の問いに答えなさい。

(1) この気球が一定の加速度 α [m/s²]で上昇しているとする。気球内で質量 14kg の砂袋をばねばかりで計ると、見かけ上 15kg となった。α はいくらか？

答:　前問(1)より $14\times(9.8+\alpha)= 15\times9.8$　$\therefore 14\alpha=9.8$　$\alpha=0.70$ m/s²

(2) この気球が一定の速度 v[m/s]で上昇しているとする。高さ 100m においてこの砂袋を気球から静かに落とすと、時間 5.0s 後に砂袋は地面に達した。砂袋を落とした時の気球の速さを求めよ。

答: 重力加速度の大きさを g[m/s²], 求める速度を v[m/s]（上向きを正）落とした点を原点にとれば、

位置 x[m], 落下するに要する時間 t[s]として $x = x_0 + vt + \frac{1}{2}gt^2$　という公式から

(高度100mの地点を原点にとる---地表は-100m の場所)

$-100=v\times5.0+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times5.0^2$　$\therefore v=-20+24.5 = 4.5$　m/s