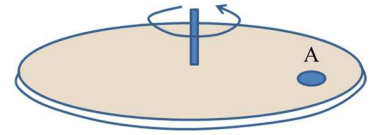


学籍番号 _____

氏名 _____

問題 1. 右図のように、粗い円盤上の中心から a [m] の位置に質量 m [kg] の小物体 A を置いた。そして円盤の中心を軸として円盤を回転させた。ここで A と円盤との間の静摩擦係数を μ 、動摩擦係数を μ' とし、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。



(1) 円盤の回転数が n [Hz] ($n > 0$) のとき、A に生じる向心力(遠心力)の大きさを求めよ。

解答: 回転による向心加速度は、角速度を ω [rad/s] とすると $ma\omega^2$ である。

ここで回転数が n [Hz] であるから、角速度 $\omega = n \times 2\pi = 2\pi n$ [rad/s]。

$$\therefore \text{向心力(遠心力)} = ma\omega^2 = 4\pi^2 n^2 ma \text{ [N]}$$

(2) 円盤の回転数を少しずつ上げていくと、A が円盤上を滑り始めた。A が滑り始める直前の摩擦力の大きさと、その時の回転数を求めよ。

解答: 最大静摩擦力の大きさは、静摩擦係数が μ であるから μmg [N]

そのときの回転数を N とすると、(1) から $4\pi^2 N^2 ma$ [N]

よって滑り始める直前では $\mu mg = 4\pi^2 N^2 ma$ が成り立つので、 $N = \sqrt{\frac{\mu g}{4\pi^2 a}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu g}{a}}$ [Hz]

(3) 円盤の回転数が n [Hz] ($n > 0$) のとき、A は円盤上で静止していた。そして、円盤を急に止めた。すると A は動き出した。A が静止するまでに要する時間と移動する距離を求めよ。ここで、円盤は A が落ちない程度に十分大きいとする。

解答: 円盤が停止した時の A の速さ v [m/s] = $a\omega = 2\pi na$ [m/s]

また動摩擦力による加速度の大きさは A の運動に逆向きで $\mu' g$ [m/s²]

従って A が停止するまでの時間 $t = \frac{2\pi na}{\mu' g}$ [s]

この間に A が移動するのは、 $vt - \frac{1}{2}\mu' g t^2 = 2\pi na \frac{2\pi na}{\mu' g} - \frac{1}{2}\mu' g \left(\frac{2\pi na}{\mu' g}\right)^2 = \frac{2\pi^2 n^2 a^2}{\mu' g}$ [m]

問題 2. 水平な直線レール上を進行する電車がある。A 点を一定の加速度で発車し、B 点で速さ v [m/s] に達した後、C 点まで等速度運動をし、C 点からは一定加速度で減速して D 点で停まるものとする。この電車の中で、天井から軽いつる巻きばねで質量 m [kg] のおもりをつるしたところ、AB 間、BC 間、CD 間では、バネの長さが自然長よりそれぞれ s_1 [m]、 s_2 [m]、 s_3 [m] だけ伸びていた。ここで重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。

(1) このつる巻きばねのばね定数を求めよ。

解答: BC 間は等加速度運動なので、ばね定数を k [N/m] とおくと、 $mg = ks_2$ が成り立つ

$$\therefore k = \frac{mg}{s_2} \text{ [N/m]}$$

(2) 電車が AB 間、および CD 間を進行している時の加速度の大きさを求めよ。

解答: 加速度 a [m/s²] のときのばねの伸び x [m] は、ばね定数を k [N/m] とすると

$$\text{張力 } T = m\sqrt{a^2 + g^2} = kx \text{ なので、AB 間: } \frac{1}{m}\sqrt{(ks_1)^2 - (mg)^2} = \frac{g}{s_2}\sqrt{s_1^2 - s_2^2}$$

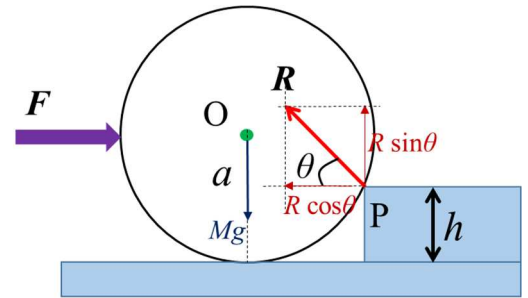
$$\text{同様に、CD 間: } \frac{1}{m}\sqrt{(ks_3)^2 - (mg)^2} = \frac{g}{s_2}\sqrt{s_3^2 - s_2^2}$$

(3) AB 間および CD 間の距離を求めよ。

解答: AB間の距離を x_1 [m]、加速度の大きさを α_1 [m/s²]、CD間の距離を x_3 [m]、加速度の大きさを α_3 [m/s²]とおく。B点で速さ v [m/s]だから $v^2 = 2\alpha_1 x_1 = 2\alpha_3 x_3$

$$\therefore x_1 = \frac{v^2}{2\alpha_1} = \frac{v^2 s_2}{2g\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} \text{ [m]} \quad x_3 = \frac{v^2}{2\alpha_3} = \frac{v^2 s_2}{2g\sqrt{s_3^2 - s_2^2}} \text{ [m]}$$

問題 3. 右図のように、水平面上に置かれた質量 M 、半径 a の円柱を高さ h の段上に押しあげたい。水平方向に大きさ F の力を円柱の中心を通るように加えるとすれば、 F はどのくらいの大きさでないといけないか、答えよ。また、円柱が段の角(図中の P 点)からうける抗力 R の大きさも答えよ。ただし、円柱は角で滑らないものとする。



解答 重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。円柱が対象であるが、円柱の断面で起きていることだけを考えればよい(どの断面でも同じことが起きている)
半径 a 、質量 M の円柱が接している段の角を P、そこから受ける抗力の大きさを R とし、抗力 R が段となす角度を θ とおいて考える。

円柱がまさに段上に上がるときの「静止条件」を考える:

(1)力のつり合い: 水平方向: $F = R \cos\theta$

垂直方向: $Mg = R \sin\theta$

\therefore 段上にあがる \Rightarrow 床からの垂直抗力が 0

これから $R = \sqrt{F^2 + (Mg)^2}$

(2) P 点まわりの力のモーメントのつり合い

$$Mg \times \sqrt{a^2 - (a-h)^2} - F \times (a-h) = 0$$

これから F が $\frac{Mg\sqrt{h(2a-h)}}{a-h}$ 以上だと段上にあがることがわかる。またそのとき $R = \frac{aMg}{a-h}$

ちなみに $\theta = \arcsin \frac{a-h}{a}$ となり、抗力 R は O を向くことがわかる ---接線の法線だから当然(!)

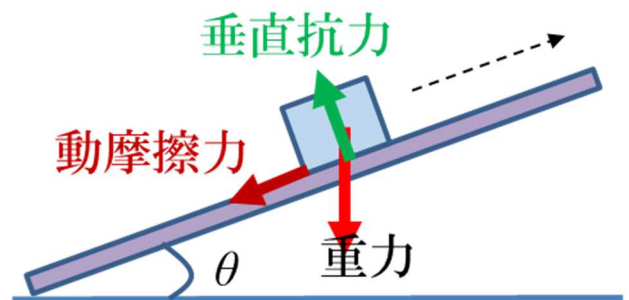
問題 4. 質量 m [kg] の質点が傾角 θ の粗い斜面の最大傾斜線にそって初速 v [m/s] で上がりだした。この質点は斜面上どれだけの距離を上がるか? ただし重力加速度の大きさを g [m/s²]、動摩擦係数を μ' とする。

註: この問題は第 11 章「仕事とエネルギー」を学んだ後で再度検討する。ここでは運動方程式によって答えを求めてみよ。

解答 質点に働く力は右図のとおり。

斜面上に沿って下向きに働く力は動摩擦力と重力の分力。

ここで重力は、斜面上に垂直かつ斜面からの垂直抗力に等しい大きさ $mg \cos\theta$ と、斜面上に平行で下向きの力 $mg \sin\theta$ に分解できる。よって動摩擦力は斜面上に平行下向きで、大きさが $\mu' mg \cos\theta$ となる。この 2 つの力 (重力の分力と動摩擦力) により、質点は斜面上に平行下向きに、 $g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)$ の加速度をもつ。よって、この質点が斜面上を上がって停



止する時間を t [s] とすると、 $t = \frac{v}{g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)}$ [s] である。これから、この間に進む距離は

$$vt - \frac{1}{2} g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)t^2 = \frac{v^2}{2g(\sin\theta + \mu' \cos\theta)} \text{ [m]}$$