物理「力学」宿題(締切：**5 月 18 日(金) 午前 8 時**、11 号館 6 階 EV ホール)　　　2018-05-14

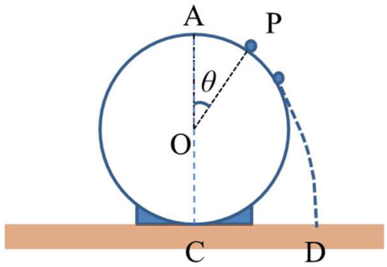
学籍番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　**氏名**＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

問題 1．教科書の例題 12.3 を読むこと。そしてこれに基づき、月の月面からロケットを打ち上げて月の引力圏から脱出させるために必要な最小の速さを求めよ。ただし、万有引力定数 G=6.7×10^{-11} Nm^2/kg^2、月の質量 M = 7.3 ×10^{22} kg、月の半径 R = 1.7×10^3 km **とする。**

解答： 万有引力定数 G [N m^2/kg^2]、月の質量を M [kg], ロケットの質量を m[kg]、月の引力圏からの脱出の速さを v_0 [m/s]とすると例題 12.3 から $v_0 \geqq \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ であれば月の引力圏から脱出できる。M = 7.3 ×10^{22} kg、R = 1.7×10^{3}km=1.7×10^{6}m、G = 6.7×10^{-11} Nm^2/kg^2 を代入して、

$v_0 \geqq$ 2.4 ×10^3 m/s　　∴2.4×10^3 m/s **もしくは** 2.4 km/s **でもよい**

問題 2. 半径 R[m]のなめらかな球が水平な床に接した状態で固定されている。いま球の頂点 A から質量 m[kg]の質点 P がゆっくりと滑り出した。以下では重力加速度の大きさを g[m/s^2]とし、空気抵抗は無視できるものとせよ。



(1)質点 P が球の表面にとどまっているとき、O を球の中心として∠AOP が θ となったときの P の速さ v[m/s]を求めよ。

解答：

O 点を位置エネルギーの基準点とすれば、質点が P にあるとき、力学的エネルギー保存則から、 $mg\,R = \frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta$　　これを変形して$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta)$

したがって、$v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$ [m/s]

(2) 上記の状態のときの質点 P が球から受ける垂直抗力の大きさを求めよ。

解答：質点 P は円運動をしているとみなせる。重力 mg[N]の法線方向の分力と球からの垂直抗力 N[N]の差が向心力となるので　$m\frac{v^2}{R} = mg\cos\theta - N$

ゆえに(1)から v の値を代入して、$N = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2)$ [N]

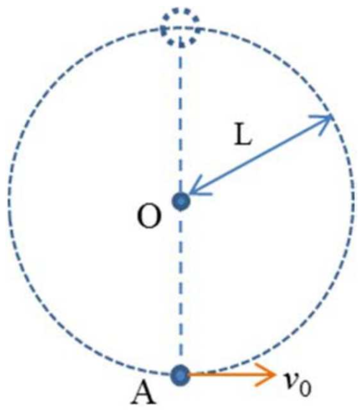
(3) (2)の答において、垂直抗力の大きさ 0 となる角度 θ を求めよ。これは質点 P が球面から離れる地点を与えている。

解答： (2)の解で N=0 として、 $3\cos\theta - 2 = 0$　ゆえに $\cos\theta = 2/3$　もしくは $\theta = \cos^{-1}2/3$

(4) 質点 P が球面から離れた時の速さを v [m/s]、球面から離れて床に落ちるまでの時間を t [s]として、P が床に落ちた場所 D と、球の中心 O の直下の床の上の点 C との距離を答えよ。

解答：(3)より質点 P が球面から離れた時の位置は O から水平方向 $R\sin\theta = R\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}R}{3}$ の位置である。また P が球面から離れた速さが $\boldsymbol{v}$[m/s]であることから、P は水平方向に $2v/3$、鉛直下向きに $\sqrt{5}v/3$ の速さをもって球面から離れたことになる。ここで落下するのにかかった時間が t [s]なので、球面から離れてから $2vt/3$[m]水平方向に進んでいる。よって落下地点と C 点との距離は $(\sqrt{5}R+2vt)/3$ [m]。

問題 3. 長さ L[m]の伸び縮みしない軽いひもの一端を点 O に固定し、他端には質量 m[kg]の小球 A をつけてつり下げ、点 O の真下にある A に対して初速度 v_0 [m/s]を与える。A が円軌道を描くためには、v_0 はどのような値でなければならないか、答えよ。ただし、重力加速度の大きさを g[m/s^2]とする。



解答： A を位置エネルギーの基準点として考える。
円運動の最高点を B, ∠BOC=θ をなす円周上の点を C とする。
小球 A が C に来た時の速さを v[m/s]とすると、エネルギー保存則から、 $\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1+\cos\theta) = \frac{1}{2}m{v_0}^2$

これから、$v^2 = {v_0}^2 - 2gL(1+\cos\theta)$ --- ①
が成り立つ。また、このとき、ひもの張力 T[N]を考えると、

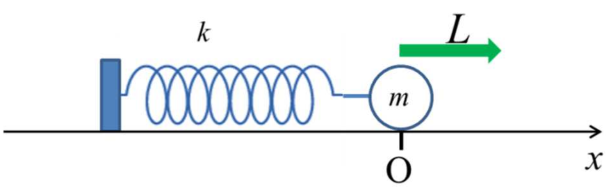
$$T = m\frac{v^2}{L} - mg\cos\theta \ \text{[N]} \quad \text{--- ②}$$

となる。A が円軌道を描くためには、θ=0 のとき、$T \geqq 0$ でなければならない。
よって、①、②から、

$$m\frac{v^2}{L} - mg\cos\theta = \frac{m}{L}({v_0}^2 - 2gL(1+\cos\theta) - gL\cos\theta) = \frac{m}{L}({v_0}^2 - gL(2+3\cos\theta)) \geqq 0$$

ここで θ=0 のとき$\cos\theta = 1$から、${v_0}^2 - 5gL \geqq 0$
ゆえに、$v_0 \geq \sqrt{5gL}$ [m/s]

問題 4. 微分方程式 $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$ が $x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$ (C_1 と C_2 は初期条件によって定まる)という一般解を持つことを前提として、以下の問に答えよ。



質量が無視できるバネ定数 k [N/m]のつる巻きばねの一端に、質量 m[kg] の質点をつけ、摩擦力が無視できる水平な台の上にのせる。バネの他端は台上に固定する。質点をつり合いの位置からばねの方向に距離 L[m]だけ引っ張って静かに放すとき、振動の周期が $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [s] で与えられることを示せ。

解答: 質点の運動の運動方程式は、$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ と表せる。ここで、$\omega^2 = \frac{k}{m}$とすると、この一般解は $x = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$ となる。ここで t=0 のときの初期値(x=L, $\dot{x}$=0)から、$C_1 = 0, C_2 = L$ となるので、この質点の運動が $x(t) = L\cos\omega t$ と表わされることがわかった。
ゆえに、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ [s] である。