中京大学工学部電気電子工学科

学科目	物理学	出題者	白井　英俊	試験日	2015 年　6 月　1 日　月曜日　実施
注意事項	指定用紙と通信機能のない電卓、時計のみ持ち込み許可。解答の順番は自由。不正行為者に対しては、物理学の単位をFとする。				

本試験において、特に断りがない場合は、重力加速度の大きさを g[m/s^2] とする。

問題 1.　火星の半径はおよそ 3.4×10^3 km、質量はおよそ　6.4×10^{23} kg である。また、自転周期はおよそ 25 時間である。万有引力定数 $G=6.7\times10^{-11}$ Nm²/kg² であることを用いて以下の問に答えよ。計算には、円周率 $\pi=3.14$ を用いよ。計算式を書き、答は有効数字の桁数を考慮し、単位を明記すること。

(1) 火星における重力加速度の大きさを求めよ。

万有引力の法則から、半径R、質量Mにより　GM/R^2　である。計算すると 3.709 ≒　3.7 m/s^2

(2) 火星上で周期が2.0 sの単振り子を作りたい。この振り子の糸の長さを求めよ。

振り子の周期Tは、長さをl、重力加速度の大きさをgとすれば、　$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$　であるから　$l=g(T/2\pi)^2$ ≒ 0.38 m

(3) 火星の自転の角速度を求めよ。

自転の周期Tが 25時間＝$9.0*10^4$ s　であることから角速度 $=2\pi/T=6.98*10^{-5}$ ≒ 7.0×10^{-5} rad/s

(4)火星の赤道の地表面に置かれた質量 1.0kg の質点にはたらく「火星の自転による遠心力の大きさ」を求めよ。

半径　r　の円周を角速度　ω　で等速円運動をする質量　m　の物体にはたらく遠心力の大きさは　$mr\omega^2$　だから
0.0166　≒1.7×10^{-2} N

問題２　右図のように、水平でなめらかな床の上に長さ l　[m]、質量 M [kg]の薄い板が静止しており、その板の左端に質量 m[kg]の人が立っている。人の厚みは無視できるものとし、重力加速度の大きさを g[m/s^2]　とする。

(1)　板の左端を原点にとり、水平方向に x 軸を取る（右向きを正とする）。このとき、板と人を一体とみなした時の重心の位置を次のようにして求めよ。ここで重心の位置が板の左端から x[m]の位置にあるとし、板の左端点まわりの力のモーメントを考える。(a)人と板の質量による力のモーメントの和が、　(b)重心に「人と板の質量の総和」がかかっていると考えたときの力のモーメントを求め、(a)=(b)から板の重心の位置 x_G を M,m,l で表わす。

(a) $lMg/2$ = (b)　$(M+m)g$ x_G　　　ゆえに　$x_G=lM/(2(M+m))$ [m]

(2) この人が板の上を、板に対して(相対的な)速さ v[m/s]で右方向に歩くとする。このとき板の速度の大きさと向きを求めよ。

動く前の運動量は 0　動き始めてからの(床に対する)板の速度を　V[m/s]　とすると、人は床に対して　$v+V$　[m/s]で動くことになる　　$m(v+V)+MV=0$
これから　$V=-mv/(m+M)$ [m/s]　　　　　**ゆえに速さは**　$mv/(m+M)$ [m/s]、**向きは左向き**

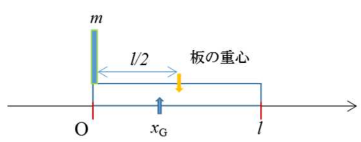
(3) この人が板の上を、板から水平右向きに一定の力 f [N]:　を受けて動くとする（ヒント:「板から力」ということは、作用反作用によって板も動く）。動き始めてから時間が t [s]だけ経過したとき、この人が板の上で移動した距離を求めよ。ただしこの時点において、この人はまだ板の右端には到達していないものとする。

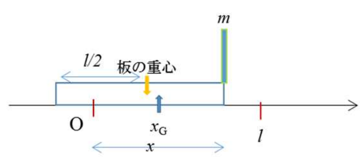
人についての運動方程式:は位置を x として　$m\ddot{x}=f$　　よって t[s]に移動した距離は　$x=(f/m)t^2/2$

このとき床も**動いており、その運動方程式は位置を x として**　$M\ddot{x}=-f$　よって t[s]に移動した距離 $x=-(f/M)t^2/2$

ゆえに板の上で移動した距離はこの差である: $(f/m)t^2/2+(f/M)t^2/2$　$=\frac{t^2}{2}\left(\frac{f}{m}+\frac{f}{M}\right)=\frac{ft^2(M+m)}{2mM}$ [m]

(4) この人が板の上を左端から右端まで静かに移動した時、この人は床に対してどれだけ進んだことになるか？（ヒント：板も動くが板と人からなる系の重心は（外力がないので）動かない。人が床に対して進んだ距離を x[m]とし、まず移動後の板の重心の位置を x を用いて表す。そしてそれが(1)の値と等しくなることを用い、x を求める---ややこしいので図を書いて考えよう）

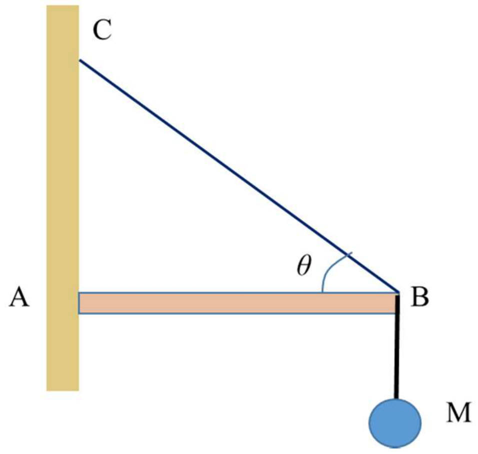




右図から、O 点回りの力のモーメント:　$x_G(M+m)=mx+(x-l/2)M$
これより、$x_G=(mx+(x-l/2)M)\ /(M+m)$　これが(1)の値 $lM/(2(M+m))$　と等しい
$2(mx+(x-l/2)M)=lM$　　$2(m+M)x=2lM$　故に　$x=lM/(M+m)$

工　学部　電気電子工学科　　年	番号		名前		点数	

問題3．長さが l [m]で質量 M[kg]の一様な棒 AB の A 端を鉛直な粗い壁面に押し当て、B 端を軽く伸び縮みしない糸で結び、糸の他端を C 点に固定した。ここで B 端に質量 M[kg]のおもり M を吊り下げたところ、棒は A 点で壁に垂直な姿勢を保ち、糸と棒とのなす角は θ=30° となった。重力加速度の大きさを g[m/s^2]として以下の問に答えよ。



(1) 棒にかかる力のつり合いの式を、水平方向と鉛直方向に分けて書け。ただし糸の張力の大きさを T[N]、A 点での摩擦力の大きさを f[N]、垂直抗力の大きさを N[N]で表す。

水平方向: (右向き正) $N - T\cos\theta = 0$　または $N - \sqrt{3}T/2 = 0$

垂直方向: (上向き正) $T\sin\theta + f - 2Mg = 0$　または $T/2 + f - 2Mg = 0$

(2) (1)の記号を用いて、A 点まわりの力のモーメントの釣り合いの式を書け。

反時計回りが正　$Tl\sin\theta - Mgl - Mgl/2 = 0$　または　$lT/2 - Mgl - Mgl/2 = 0$

(3) (1), (2)の結果から、糸の張力の大きさ T、A 点の垂直抗力の大きさ N、摩擦力の大きさ fをそれぞれ求めよ。(注意: 答には数値以外に、l, M, g の中の適切な記号だけを用いよ)

A 点まわりの力のモーメントの釣り合いの式から　$T = 3Mg$

これにより、$N = 3\sqrt{3}Mg/2$

また $f = Mg/2$

(4) おもり M の吊り下げ位置を B 点から A 点の方にゆっくり移動させたところ、B 点から距離 x[m]の位置で棒の A 端が滑り始めた。壁と棒との最大静止摩擦係数を μ とする。またここでも糸の張力の大きさを T[N]、A 点での垂直抗力の大きさを N[N]で表すとする（注意：(1)の値とは異なる。）。注意：(c),(d)は**答だけではなくそれを導く計算式（と簡単な説明）も書くこと**

(a) 棒にかかる力のつり合いの式を、水平方向と鉛直方向に分けて書け。

水平方向: (右向き正) $N - T\cos\theta = 0$　または $N - \sqrt{3}T/2 = 0$　①

静止摩擦力は、題意から最大静止摩擦力になるので、

垂直方向: (上向き正) $T\sin\theta + \mu N - 2Mg = 0$　または $T/2 + \mu N - 2Mg = 0$　②

(b) B 点まわりの力のモーメントの釣り合いの式を書け。

$-\mu Nl + Mgx + Mgl/2 = 0$　③

(c) l, M, g, μ, x の中の適切な記号を用いて T と N の値を表わせ。

③から　$\mu N = Mg(x/l + 1/2)$　ゆえに　$N = Mg(2x + l)/(2\mu l)$

これを①に代入して、$T = Mg(2x + l)/(\sqrt{3}\mu l)$

もしくは ②に代入して　$T = 4Mg - Mg(2x + l)/l = Mg(3l - 2x)/l$

(d) x を求めよ。ただし、この答には数値以外に、l, μ, g の中の適切な記号だけを用いよ。

(c)の結果から、$Mg(3l - 2x)/l = Mg(2x + l)/(\sqrt{3}\mu l)$

Mg ≠ 0 より $\sqrt{3}\mu(3l - 2x) = (2x + l)$

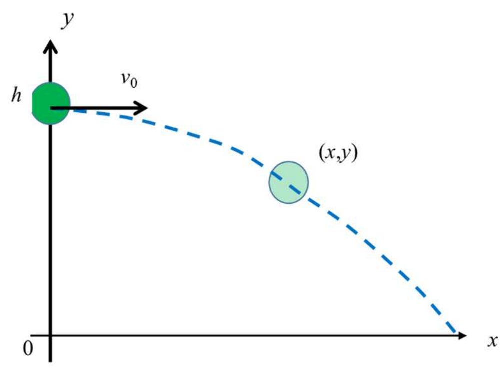
これから $2(\sqrt{3}\mu + 1)x = (3\sqrt{3}\mu - 1)l$

故に $x = \frac{3\sqrt{3}\mu - 1}{2(\sqrt{3}\mu + 1)}l$

中京大学工学部電気電子工学科

学科目	物理学	出題者	白井　英俊	試験日	2015 年　6 月　1 日　月曜日　実施
注意事項	指定用紙と通信機能のない電卓、時計のみ持ち込み許可。解答の順番は自由。不正行為者に対しては、物理学の単位をFとする。				

問題4.　右図のように、時刻 $t=0$ において質量 m[kg]の小物体を地表 h [m]の高さの点から速さ v_0 [m/s]で水平方向に投げた。この小物体が地表に落ちるまでの運動を考えよう。ここで、地面に平行に x 軸、垂直に y 軸をとって小物体の位置を表す。



注意: **⑵以降は答だけではなくそれを導く計算式（と簡単な説明）も書くこと**

⑴ 空気の抵抗が、小物体の質量と速度の積に比例するものとする(空気抵抗の比例係数を k とする)。このときの運動方程式を答えよ。（注意：運動の x 成分と y 成分、それぞれに式を立てる）

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -km\, v_x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -gm - km\, v_y$$

⑷ この物体の速度を表す式を求めよ。（注意：運動の x 成分 v_x と y 成分 v_y、それぞれの式を立てる）

(1)の式から、

$\frac{1}{v_x}\frac{dv_x}{dt} = -k$　∴ $v_x = C\,e^{-kt}$　*(C は定数)*

初期条件(t=0 での x 方向の速度)から、$v_x = v_0\,e^{-kt}$

$\frac{dv_y}{dt} = -k(\frac{g}{k} + v_y)$

$\frac{1}{(v_y+\frac{g}{k})}\frac{dv_y}{dt} = -k$　∴ $\log(v_y+\frac{g}{k}) = -k + C$　*(C は定数)*

よって、$v_y + \frac{g}{k} = C'e^{-kt}$

初期条件(t=0 での y 方向の速度)から、$v_y = \frac{g}{k}(e^{-kt} - 1)$

⑸ この物体の位置を表す式をそれぞれ求めよ。（注意：運動の x 成分と y 成分、それぞれに式を立てる）

⑷式から

$x = \frac{-1}{k}v_0\,e^{-kt} + C'$　*(C'は定数)*

初期条件(t=0 での x 方向の位置)から、$x = \frac{-1}{k}v_0(e^{-kt} - 1)$

同様に、$y = \frac{g}{k}(\frac{-1}{k}e^{-kt} - t) + C'$　*(C'は定数)*

初期条件(t=0 での x 方向の位置)から、$y = \frac{g}{k}\left(\frac{-1}{k}(e^{-kt} - 1) - t\right) + h$

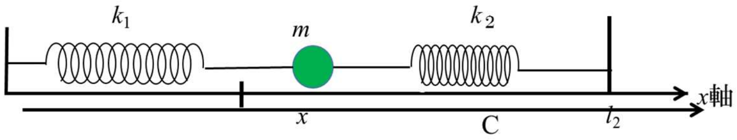
⑹ h がとても大きい場合は地表面に落ちることなく運動が続く。その状況において、とても長い時間がたった時の速度（終速度）を求めよ。

⑷の結果から、$\lim_{t\to\infty} v_x = \lim_{t\to\infty} v_0\,e^{\frac{-k}{m}t} = 0$

$\lim_{t\to\infty} v_y = \lim_{t\to\infty} \frac{g}{k}(e^{-kt} - 1) = \frac{-g}{k}$　　したがって、$\frac{-g}{k}$ [m/s]

工　学部　電気電子工学科　　年	番号								名前		点数	

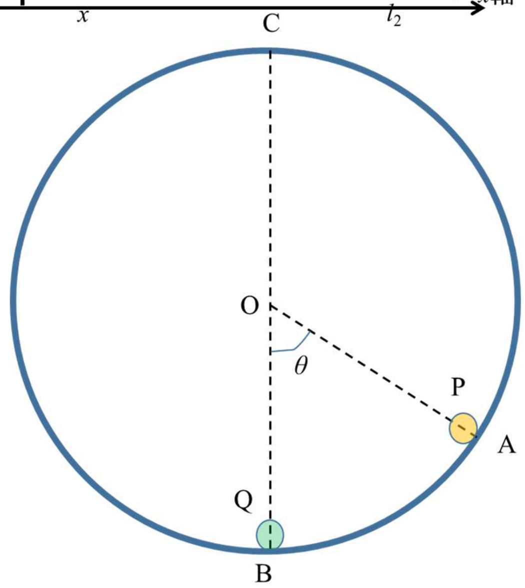
問題5　右図のように自然長がそれぞれ l_1, l_2 で、バネ定数が k_1, k_2 の2本のばねにつながれて、なめらかな水平面に置かれた質量 m の質点の振動運動を考える。2本のばねがともに自然長の位置を原点として x 軸を設定する。(1)この質点の位置が x のときの運動方程式を書け。



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -(k1+k_2)x$$

(2) この質点は単振動する。その周期を求めよ。

$$2\pi\sqrt{\frac{m}{(k1+k2)}}$$



問題 6　右図は半径 r[m] のなめらかな円筒の鉛直断面の図である。円筒の中心点を O、その真下の円筒内面の点を B、その真上の円筒内面の点を C とする。また円筒内面の点 A は O 点と結んだ線 OA が OB と角 θ をなす点である。

その点 A 上に質量 M [kg]の質点が、点 B 上には質量 m[kg]の質点 Q がある。

質点 P と Q はともにこの平面内で運動する。ここで質点 P が静止状態から円筒にそって滑り落ちて質点 Q と完全弾性衝突した。以下では重力加速度の大きさを g [m/s^2] として計算せよ。ただし、答だけではなく、それを求める計算式と説明も書くこと。なお必要ならば、位置エネルギ＾—の基準点を B 点(の高さ)と考えよ。

(1) 衝突直前の P の速さ V を、M, g, r, θ のうち適切なものを用いて表わせ。

力学的エネルギー保存則　$Mgr(1-\cos\theta)=MV^2/2$　　これより　$V=\sqrt{2gr(1-\cos\theta)}$

(2) 衝突直前の P の速さを V とする。衝突後の質点 Q の速さ v を M, m, V を用いて表わせ。

衝突後の P の速度を V'とする(左方向正)。　運動量保存則:　$MV=mv+MV'$

反発係数:　$V=v-V'$　　　$MV=Mv-MV'$　　ゆえに $(M+m)v=2MV$

これから　$v=2MV/(M+m)$

(3)点 Q が円筒にそって運動し、O の真上の点 C に到達するための条件を、衝突後の質点 Q の速さを v として、v, g, r を用いて表わせ(ヒント: 点 C に到達したときの質点 Q の速さを求め、それを用いて C 点における遠心力が計算できる。この遠心力はどのような大きさでなければならないだろうか？)

C 点に到達するとする。その時の速さを v'とすると、
力学的エネルギー保存則　$mv^2/2 = mv'^2/2 + 2rmg$　　これから $v'^2 = v^2 - 4gr$
また C 点での遠心力は、　$m v'^2/r$　これは重力 mg よりも大きくないと落ちてしまう。
ゆえに、　$m v'^2/r = m(v^2 - 4gr)/r \geqq mg$
$v^2 \geqq 5gr$

(4)　$\theta = \pi/2$ とする。質点 Q が円筒にそって運動し、O の真上の点 C に到達するためには、M は m の何倍以上でなければならないか、答えよ。

$\theta = \pi/2$　であるから、(1)の答 $V=\sqrt{2gr(1-\cos\theta)} = \sqrt{2gr}$

(2)に代入して、$v=2MV/(M+m) = 2M\sqrt{2gr}/(M+m)$

(3)から、$(2M\sqrt{2gr}/(M+m))^2 \geqq 5gr$　　$M/(M+m) \geqq \sqrt{\frac{5}{8}}$　　$M \geqq \sqrt{\frac{5}{8}}(M+m)$

$a = \sqrt{\frac{5}{8}}$ とおくと、$M \geqq a(M+m)$　　$(1-a)M \geqq am$　　$M \geqq m \times (1-a)/a$　　$\sqrt{\frac{5}{8}} \approx 0.79$ なので約 3.8 倍