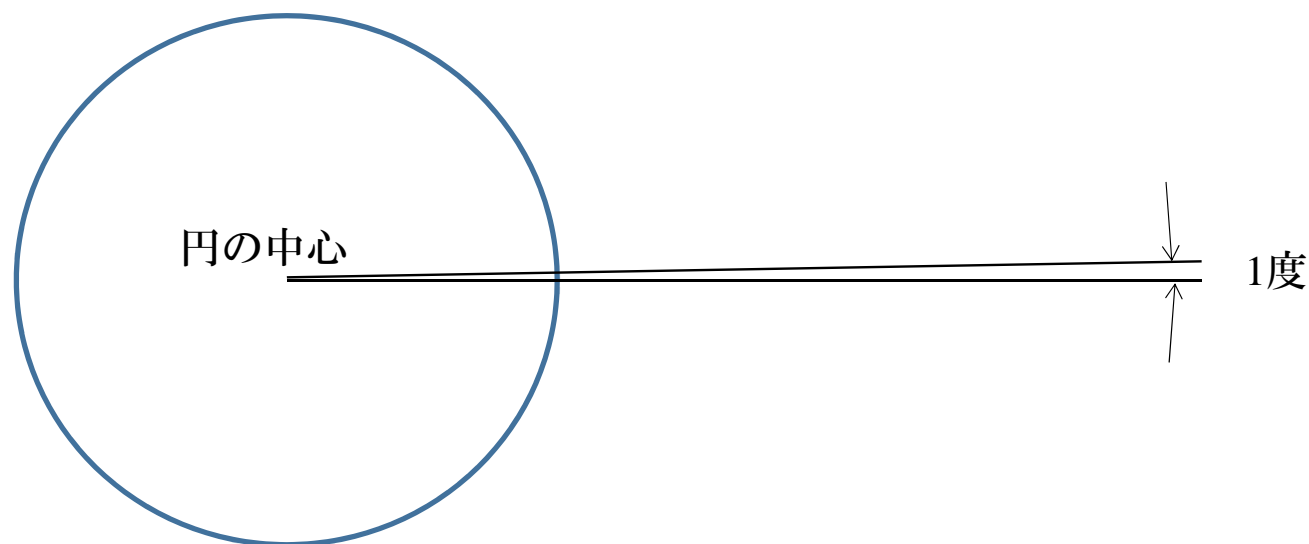


三角関数の基礎知識

1. 度数法と弧度法

- 角度の測り方

- (1) 度：円周を360等分した弧を持つ扇形の中心角を単位とする
1周は 360°



1. 度数法と弧度法

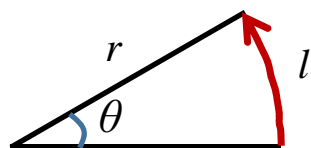
- 角度の測り方

(1) 度：円周を360等分した弧を持つ扇形の中心角を単位とする

(2) ラジアン(rad)：弧の長さ l を半径 r で割った値を単位とする

1周は 2π [rad]

$$\theta = \frac{l}{r}$$



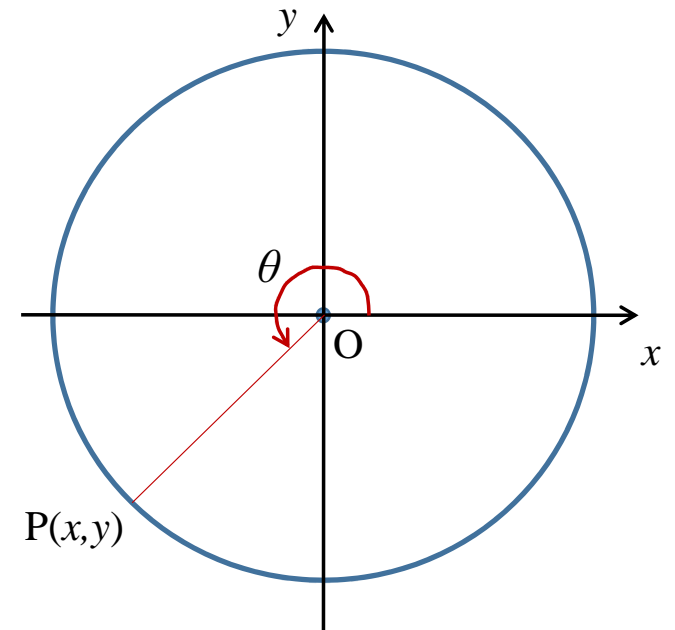
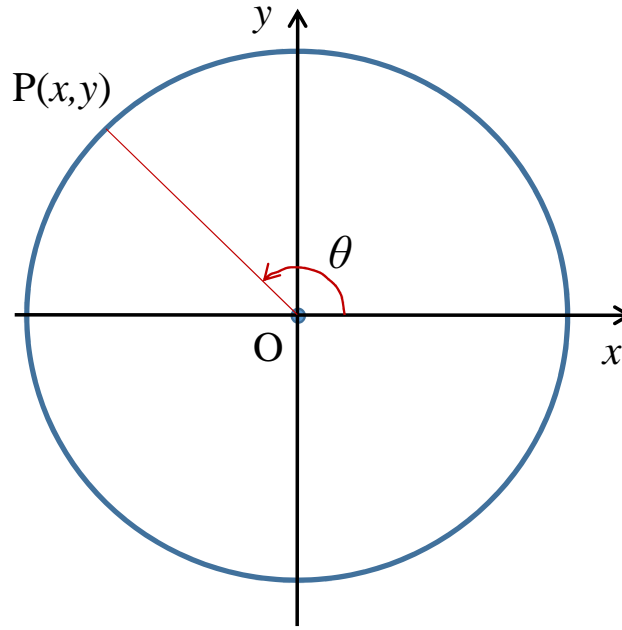
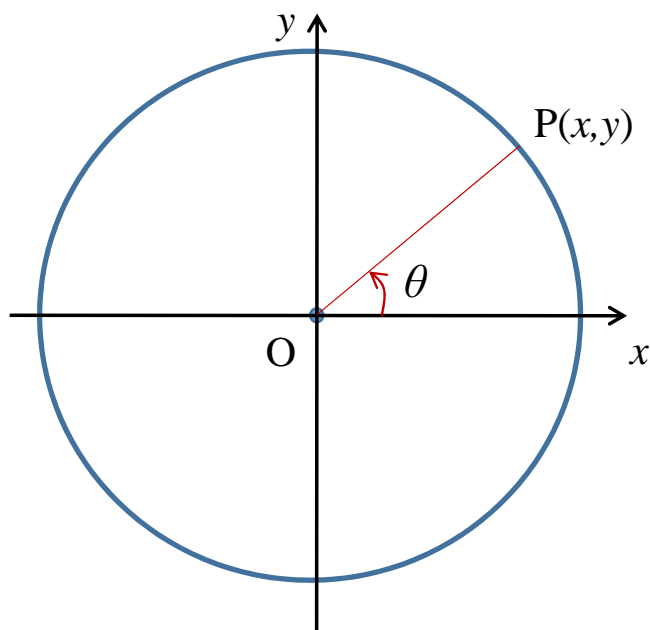
問1. 1 rad は何度か？

問2. 360° は何radか？

2. 三角関数

半径 r の円周上に点 P があり、 x 軸と OP とのなす角を θ [rad] とする

位相



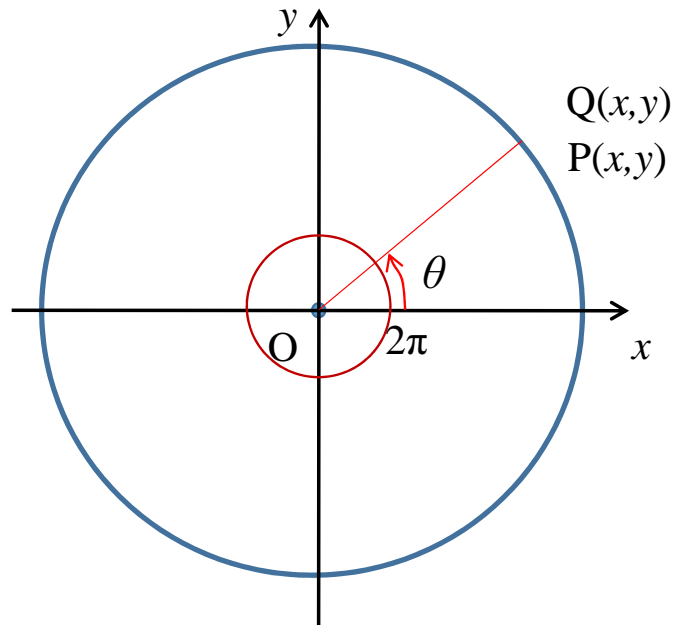
$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$x \geq 0, y \geq 0$ だから
 $\sin \theta \geq 0, \cos \theta \geq 0, \tan \theta \geq 0$

$x < 0, y \geq 0$ だから
 $\sin \theta \geq 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

$x < 0, y < 0$ だから
 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

三角関数の基本性質1



$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Q点の位相 $\varphi = \theta + 2\pi$ のとき、

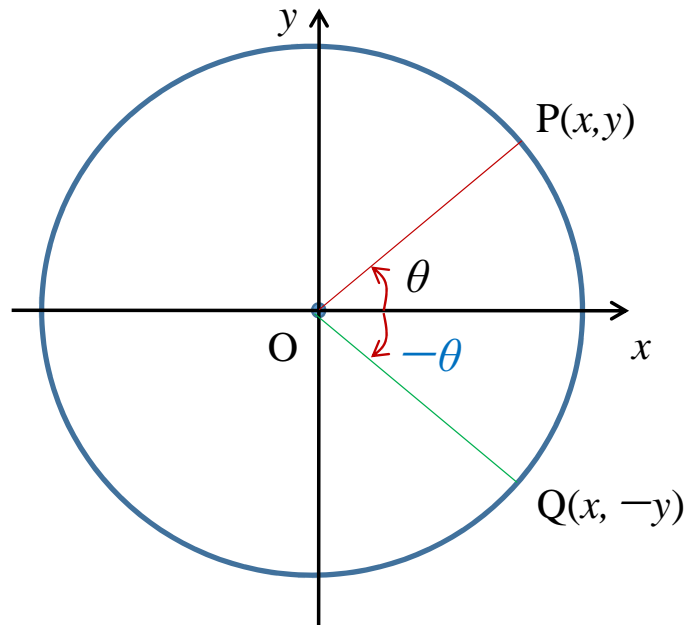
Q点のx座標もy座標も
位相が θ のP点と等しい

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos(\theta + 2\pi) &= \cos \theta \\ \sin(\theta + 2\pi) &= \sin \theta \\ \tan(\theta + 2\pi) &= \tan \theta \end{aligned}$$

より一般的に、 n を整数とすると、

$$\begin{aligned} \cos(\theta + 2n\pi) &= \cos \theta \\ \sin(\theta + 2n\pi) &= \sin \theta \\ \tan(\theta + 2n\pi) &= \tan \theta \end{aligned}$$

三角関数の基本性質2



点Pがあり、 x 軸とOPとのなす角を θ [rad]とする
点Qも x 軸とOQとのなす角が θ [rad]だが、

P点は x 軸から反時計回りに θ [rad]

Q点は x 軸から時計回りに θ [rad]の点とする

これを「負の値」として $-\theta$ で表す：Q点の位相は $-\theta$

Q点はP点と比べ

x 座標の値は等しい

y 座標は負（絶対値は等しい）

$$\Rightarrow \cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

三角関数の基本性質3

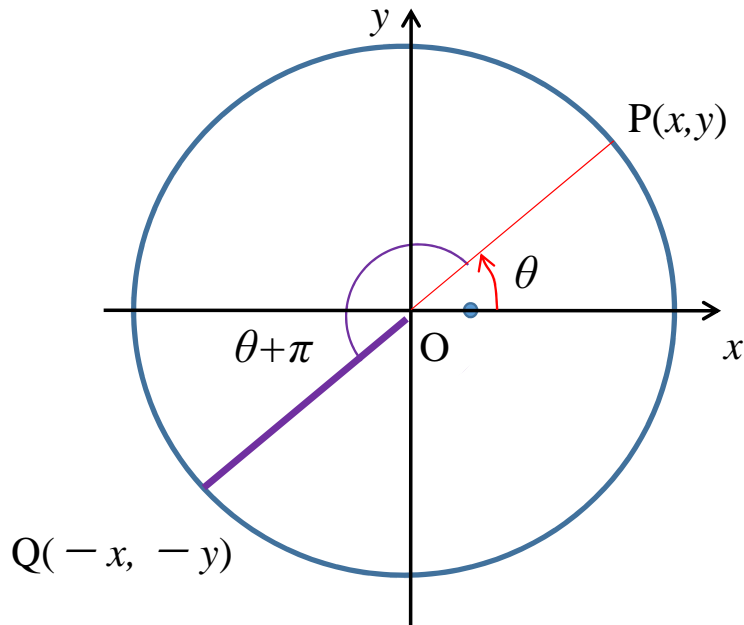
Q点の位相 $\varphi = \theta + \pi$ のとき、

Q点のx座標とy座標は
位相が θ のP点の座標を負にしたもの

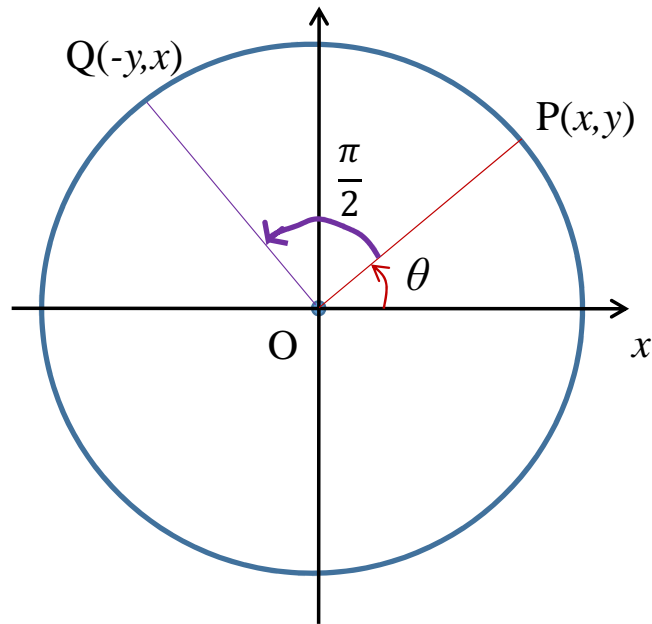
$$\Rightarrow \cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

$$\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$$



三角関数の基本性質4



Q点の位相 $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ のとき、
位相が θ のP点の座標を (x, y) とすると

$$\begin{aligned} \text{Q点の}x\text{座標} &= -y \\ y\text{座標} &= x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \theta$$

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \theta$$

$$\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan \theta} = -\cot \theta$$

三角関数の基礎問題

1. $\theta = \frac{\pi}{3}$ とする。以下を求めよ:

(1) $\cos \theta, \sin \theta, \tan \theta$

(2) $\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi), \tan(\theta + \pi)$

(3) $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}), \tan(\theta + \frac{\pi}{2})$

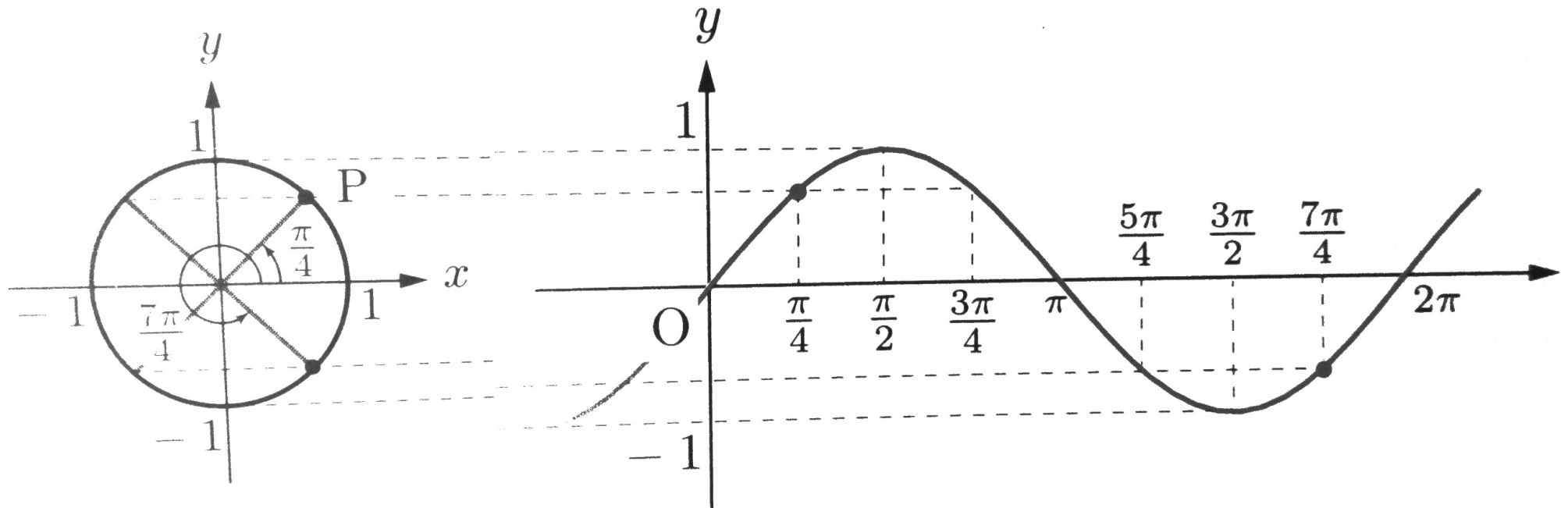
(4) $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}), \sin(\theta - \frac{\pi}{2}), \tan(\theta - \frac{\pi}{2})$

2. 以下を示せ:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta}$$

三角関数のグラフと値域

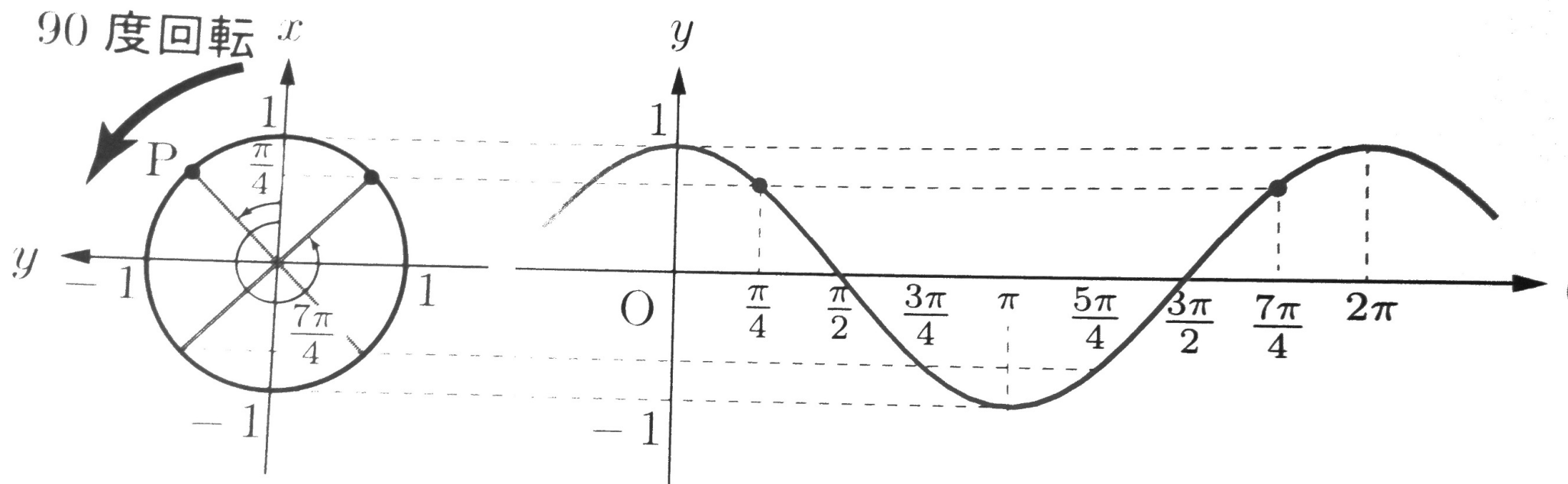
(1) $\sin\theta$ のグラフ：取りうる値は $-1 \leq \sin\theta \leq 1$
 $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$ だから、 2π ごとに同じ値を取る \Rightarrow 周期関数



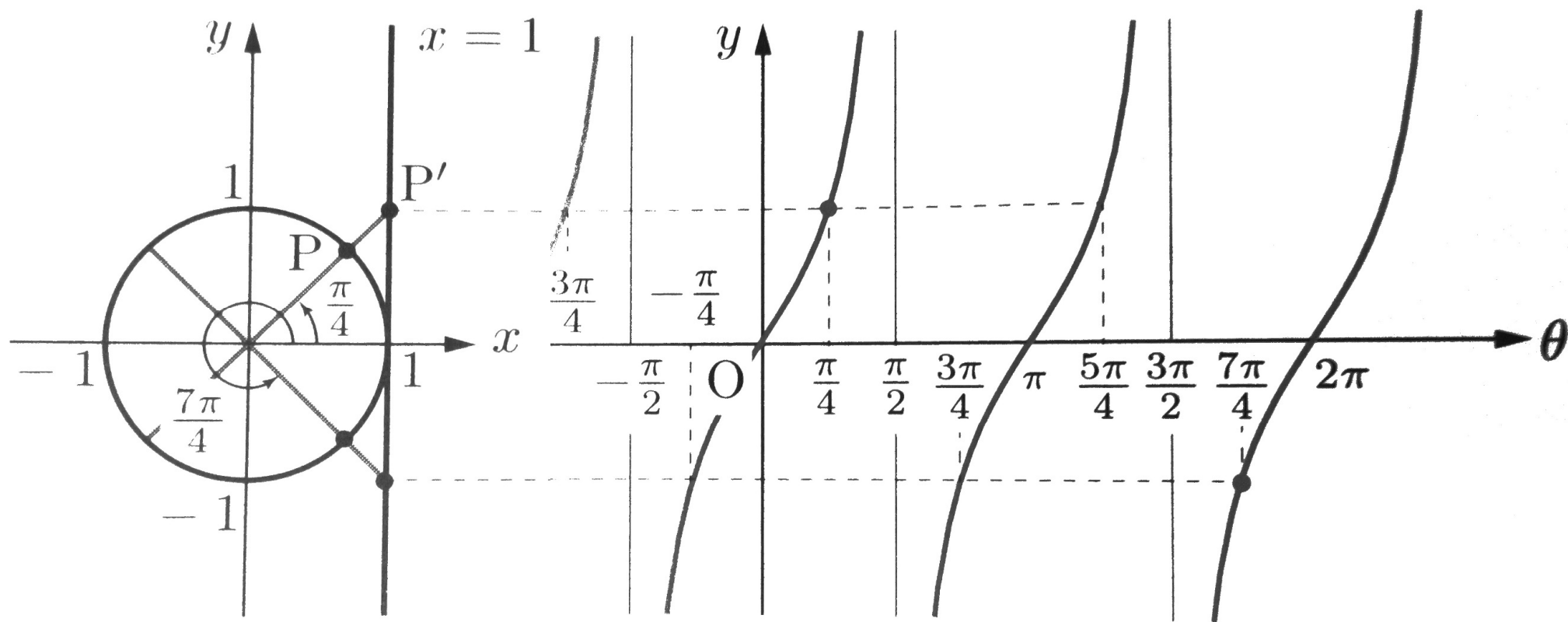
(2) $\cos \theta$ のグラフ：取りうる値は $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

$\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$ だから、 \sin と同様 2π ごとに同じ値を取る周期関数

$\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta$ だから \sin のグラフを $\frac{\pi}{2}$ だけシフトしたグラフ



(3) $\tan \theta$ のグラフ：取りうる値は $-\infty \leq \tan \leq \infty$
 $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$ だから、 π ごとに同じ値を取る周期関数
 n を整数とすると、 $\theta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ において $\tan \theta$ の値は不定



加法定理

単位円上でx軸から α [rad]回転させた点
 $P(x,y)$ と、 β [rad]回転させた点 $Q(x',y')$

$$\overline{PQ}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

$$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$$

$$\overline{PQ}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

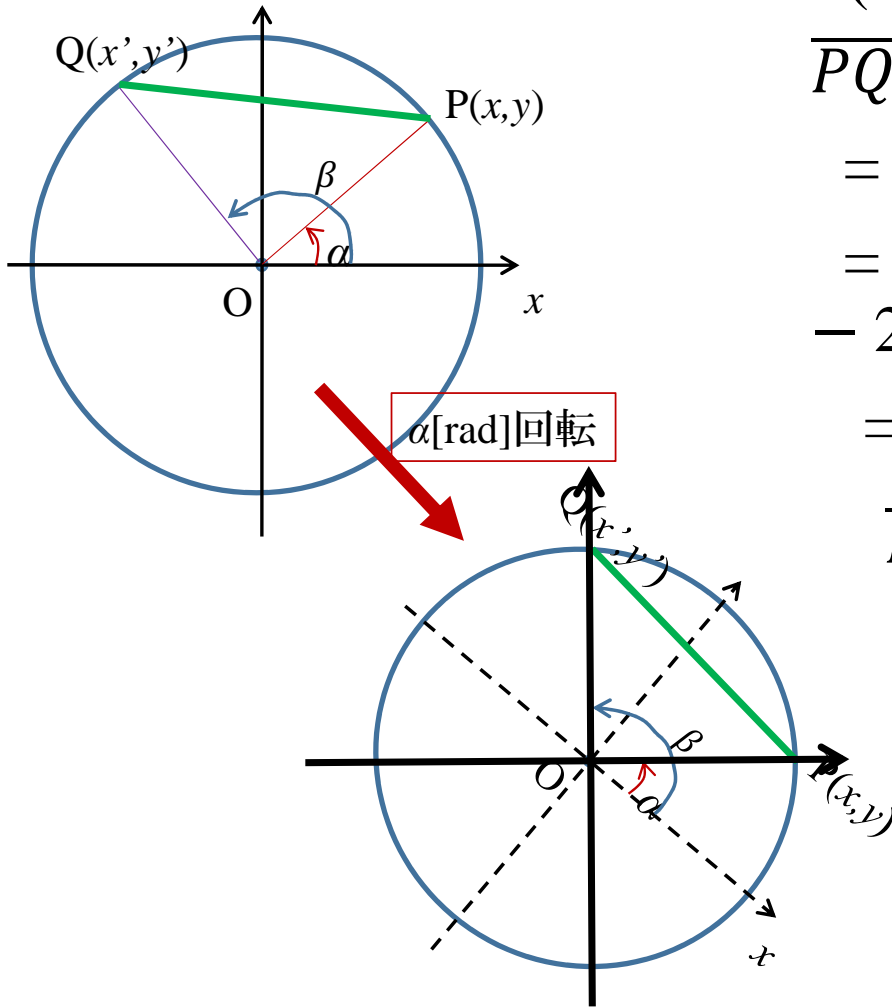
$$= (\cos(\beta - \alpha) - 1)^2 + (\sin(\beta - \alpha) - 0)^2$$

$$= \cos^2(\beta - \alpha)$$

$$- 2\cos(\beta - \alpha) + 1 + \sin^2(\beta - \alpha)$$

$$= 2 - 2\cos(\beta - \alpha)$$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$



加法定理(続)

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

ここで $\cos(-\theta) = \cos\theta$ だから

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

ここで $\beta \rightarrow -\beta$ とすると

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta\end{aligned}$$

さらに $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2} + \beta$ とすると $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$, $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ から

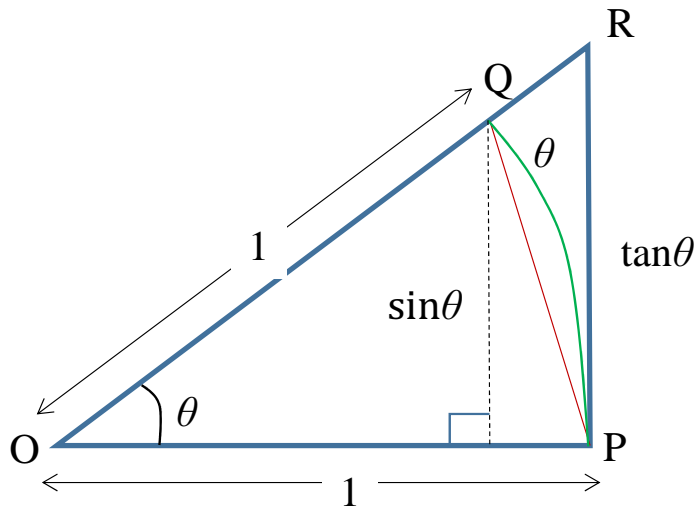
$$\begin{aligned}-\sin(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos(\frac{\pi}{2} + \beta) - \sin\alpha \sin(\frac{\pi}{2} + \beta) \\ &= -\cos\alpha \sin\beta - \sin\alpha \cos\beta\end{aligned}$$

よって $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

同様に $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$

三角関数の微分と積分

(1) $\frac{\sin \theta}{\theta}$ の $\theta \rightarrow 0$ の極限



左図のように、半径1で中心角 θ [rad]の扇形OPQを考える

内側には直角三角形OPQがある

面積を考えると $\triangle OPQ < \text{扇形OPQ} < \triangle OPR$ である
また

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \times 1 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \sin \theta$$

$$\text{扇形OPQ} = \frac{1}{2} \theta \times 1^2 = \frac{1}{2} \theta$$

$$\triangle OPR = \frac{1}{2} \times 1 \times \tan \theta$$

$$\therefore \sin \theta < \theta < \tan \theta$$

$$\sin \theta \text{ でわると } 1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta} \quad \Rightarrow \quad \cos \theta > \frac{\sin \theta}{\theta} > 1$$

この $\theta \rightarrow 0$ の極限 を考えると $\cos \theta \rightarrow 1$ なので、 $\frac{\sin \theta}{\theta} \rightarrow 1$ が言える

三角関数の微分と積分

(2) $y = \sin x$ の導関数

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

ここで加法定理から $\sin A - \sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$

これを用いると
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

ここで $\lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \cos x$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1$ より
$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$

三角関数の微分と積分

(3) $y = \cos x$ の導関数

$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ より $y = \sin X$, $X = x + \frac{\pi}{2}$ とする合成関数の微分を行う

$$\frac{d \cos x}{dx} = \frac{dy}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = \cos X \cdot 1 = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$$

三角関数の微分と積分

(4) $y = \tan x$ の導関数

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ であるから

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

三角関数の微分と積分

それぞれの三角関数の導関数より、積分定数をCとして、不定積分は以下のようになる:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

演習問題

1. σ を度数法による度とする。 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sin \sigma}{\sigma}$ を求めよ
2. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で $\sin \theta = \frac{1}{3}$ とする。
 - (1) $\sin 2\theta$ の値を求めよ
 - (2) $\cos 2\theta$ の値を求めよ
3. 次の条件が成り立つとき、 $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ
$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} \qquad \cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{3}$$
4. 次の関数の導関数をそれぞれ求めよ。
 - (1) $\tan^2 x$
 - (2) $\sin^3 x$
 - (3) $\frac{1}{1 + \cos x}$