# 2010 年度「論理と意味論」試験問題

出題者: 白井 英俊 (中京大学情報理工学部)

日時: 2011 年 1 月 25 日 (火) 4 限 (14:30~ 15:30) 846 教室

注意: 許可された用紙一枚のみ持ち込みを許可する。試験時間は 60 分。

**問題 1.** 命題論理において、$p, q, r$ を任意の 命題変項 とすると、以下の式が恒真であることを、真理値表によって証明せよ。

注意: 連言標準形に直したりせずに「このまま」の形の論理式に対する真理値表を作成すること。ただし、真理値表だけを書いたものは「証明」と認めない)

$$((p \wedge q \to r) \wedge q) \to (\sim p \vee r)$$

解答: 与式の真理値表は以下のように求められる.

| $p$ | $q$ | $r$ | $\alpha = p \wedge q$ | $\beta = \alpha \to r$ | $\gamma = \beta \wedge q$ | $\sim p$ | $\epsilon = \sim p \vee r$ | $\gamma \to \epsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | F | T | T |
| T | T | F | T | F | F | F | F | T |
| T | F | T | F | T | F | F | T | T |
| T | F | F | F | T | F | F | F | T |
| F | T | T | F | T | T | T | T | T |
| F | T | F | F | T | T | T | T | T |
| F | F | T | F | T | F | T | T | T |
| F | F | F | F | T | F | T | T | T |

以上から、どのモデルにおいても与式は真となることが分かった。ゆえに、与式は恒真式である。

**問題 2.** 以下の式に対する同値な冠頭連言標準形を求めよ。ただし、計算過程もきちんと書くこと。

(1) $\forall x \sim \forall u\{P(x) \to \exists y[(Q(u,y) \to Q(y,u)) \wedge \forall z(Q(y,z) \to R(u))]\}$

解答:

1. (空虚な量化子の削除) なし
2. (変項の付け変え) なし
3. (含意の扱い) $\forall x \sim \forall u\{\sim P(x) \vee \exists y[(\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)) \wedge \forall z(\sim Q(y,z) \vee R(u))]\}$
4. (否定記号の扱い)
$$\Longrightarrow \forall x \exists u \sim \{\sim P(x) \vee \exists y[(\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)) \wedge \forall z(\sim Q(y,z) \vee R(u))]\}$$

$\Longrightarrow \quad \forall x \exists u\{\sim\sim P(x) \wedge \sim \exists y[(\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)) \wedge \forall z(\sim Q(y,z) \vee R(u))]\}$
$\Longrightarrow \quad \forall x \exists u\{P(x) \wedge \forall y \sim [(\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)) \wedge \forall z(\sim Q(y,z) \vee R(u))]\}$
$\Longrightarrow \quad \forall x \exists u\{P(x) \wedge \forall y[\sim (\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)) \vee \sim \forall z(\sim Q(y,z) \vee R(u))]\}$
$\Longrightarrow \quad \forall x \exists u\{P(x) \wedge \forall y[(\sim\sim Q(u,y) \wedge \sim Q(y,u)) \vee \exists z \sim (\sim Q(y,z) \vee R(u))]\}$
$\Longrightarrow \quad \forall x \exists u\{P(x) \wedge \forall y[(Q(u,y) \wedge \sim Q(y,u)) \vee \exists z(\sim\sim Q(y,z) \wedge \sim R(u))]\}$
$\Longrightarrow \quad \forall x \exists u\{P(x) \wedge \forall y[(Q(u,y) \wedge \sim Q(y,u)) \vee \exists z(Q(y,z) \wedge \sim R(u))]\}$

5. (量化子の移動) $\forall x \exists u \forall y \exists z\{P(x) \wedge [(Q(u,y) \wedge \sim Q(y,u)) \vee (Q(y,z) \wedge \sim R(u))]\}$

6. (連言形へ)
$\forall x \exists u \forall y \exists z\{P(x) \wedge [(Q(u,y) \vee Q(y,z)) \wedge (Q(u,y) \vee \sim R(u)) \wedge (\sim Q(y,u) \vee Q(y,z)) \wedge (\sim Q(y,u) \vee \sim R(u))]\}$

(2) $\exists x\{\exists y(M(y) \vee P(x,y)) \to \exists y(Q(y) \wedge R(x,y))\}$

解答:

1. (空虚な量化子の削除) なし

2. (変項の付け変え) $\exists x\{\exists y(M(y) \vee P(x,y)) \to \exists z(Q(z) \wedge R(x,z))\}$

3. (含意の扱い) $\exists x\{\sim \exists y(M(y) \vee P(x,y)) \vee \exists z(Q(z) \wedge R(x,z))\}$

4. (否定記号の扱い)
$\Longrightarrow \quad \exists x\{\forall y \sim (M(y) \vee P(x,y)) \vee \exists z(Q(z) \wedge R(x,z))\}$
$\Longrightarrow \quad \exists x\{\forall y(\sim M(y) \wedge \sim P(x,y)) \vee \exists z(Q(z) \wedge R(x,z))\}$

5. (量化子の移動) $\exists x \exists z \forall y\{(\sim M(y) \wedge \sim P(x,y)) \vee (Q(z) \wedge R(x,z))\}$

6. (連言形へ)
$\exists x \exists z \forall y\{(\sim M(y) \vee Q(z)) \wedge (\sim M(y) \vee R(x,z)) \wedge (\sim P(x,y) \vee Q(z)) \wedge (\sim P(x,y) \vee R(x,z))\}$

(3) $\forall x \sim \{\forall y \forall z P(x,y,x) \wedge (\exists z Q(x,z) \to \exists y Q(x,y))\}$

解答:

1. (空虚な量化子の削除) $\forall x \sim \{\forall y P(x,y,x) \wedge (\exists z Q(x,z) \to \exists y Q(x,y))\}$

2. (変項の付け変え) $\forall x \sim \{\forall y P(x,y,x) \wedge (\exists z Q(x,z) \to \exists w Q(x,w))\}$n

3. (含意の扱い) $\forall x \sim \{\forall y P(x,y,x) \wedge (\sim \exists z Q(x,z) \vee \exists w Q(x,w))\}$

4. (否定記号の扱い)
$\Longrightarrow \quad \forall x\{\sim \forall y P(x,y,x) \vee \sim (\sim \exists z Q(x,z) \vee \exists w Q(x,w))\}$
$\Longrightarrow \quad \forall x\{\exists y \sim P(x,y,x) \vee (\sim\sim \exists z Q(x,z) \wedge \sim \exists w Q(x,w))\}$
$\Longrightarrow \quad \forall x\{\exists y \sim P(x,y,x) \vee (\exists z Q(x,z) \wedge \forall w \sim Q(x,w))\}$

5. (量化子の移動) $\forall x \exists y \exists z \forall w\{\sim P(x,y,x) \vee (Q(x,z) \wedge \sim Q(x,w))\}$

6. (連言形へ) $\forall x \exists y \exists z \forall w\{(\sim P(x,y,x) \vee Q(x,z)) \wedge (\sim P(x,y,x) \vee \sim Q(x,w))\}$

**問題 3.** モデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ とする。そして、定義域 $\mathcal{D} = \{a,b,c\}$ とする。また、解釈関数 $\mathcal{F}$ を以下のように定める。ただし、$\pi$ は個体定項、$M$ は一項述語、$L$ は二項述語とする。

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F}(\pi) & = & a \\ \mathcal{F}(M) & = & \{a,b\} \\ \mathcal{F}(L) & = & \{\langle a,a\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,a\rangle\} \end{array}$$

以下のそれぞれの論理式に対して、このモデルにおける真理値を求めよ。ただし、計算過程も書くこと。

(1) $\forall w(M(w) \to L(\pi,w))$

**解答**: 任意の割り当て関数 $g$ に対して、$\mathcal{M}, g \models \forall w(M(w) \to L(\pi,w))$ であるための必要十分条件は、$g$ のどの $w$ 変種 $g'$ に対しても $\mathcal{M}, g' \models (M(w) \to L(\pi,w))$ であること。

ここで $D = \{a,b,c\}$ であるから、$g_a(w) = a$、$g_b(w) = b$、$g_c(w) = c$ であるような $g_a, g_b, g_c$ を $g$ の $w$ 変種とすると、$\mathcal{M}, g_i \models (M(w) \to L(\pi,w))$ がいずれも成り立つこと (ここで、$g_i$ は $g_a, g_b, g_c$ を表す) と言い換えられる。

ここで $\mathcal{M}, g_a \models (M(w) \to L(\pi,w))$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_a \not\models M(w)$ または $\mathcal{M}, g_a \models L(\pi,w)$ である。$g_a(w) = a \in \mathcal{F}(M)$ から $\mathcal{M}, g_a \models M(w)$。また、$\mathcal{F}(\pi) = a$ と $\langle a,a\rangle \in \mathcal{F}(L)$ から、$\mathcal{M}, g_a \models L(\pi,w)$ も成り立つ。ゆえに、$\mathcal{M}, g_a \models (M(w) \to L(\pi,w))$ である。

また、$\mathcal{M}, g_b \models (M(w) \to L(\pi,w))$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_b \not\models M(w)$ または $\mathcal{M}, g_b \models L(\pi,w)$ である。$g_b(w) = b \in \mathcal{F}(M)$ から $\mathcal{M}, g_b \models M(w)$。しかし、$\mathcal{F}(\pi) = a$ と、$\langle a,b\rangle \notin \mathcal{F}(L)$ より、$\mathcal{M}, g_b \not\models L(\pi,w)$ である。ゆえに、$\mathcal{M}, g_b \not\models (M(w) \to L(\pi,w))$ である。

以上から、「$g$ のどの $w$ 変種 $g'$ に対しても $\mathcal{M}, g' \models (M(w) \to L(\pi,w))$」とはならないことが分かった。ゆえに、与えられたモデル $\mathcal{M}$ における与式の真理値は偽である。

(2) $\exists y(\sim M(y) \wedge L(y,y))$

**解答**: 任意の割り当て関数 $g$ に対して、$\mathcal{M}, g \models \exists y(\sim M(y) \wedge L(y,y))$ であるための必要十分条件は、$g$ のある $y$ 変種 $g'$ に対して $\mathcal{M}, g' \models (\sim M(y) \wedge L(y,y))$ であること。

ここで $D = \{a,b,c\}$ であるから、$g_a(y) = a$、$g_b(y) = b$、$g_c(y) = c$ であるような $g_a, g_b, g_c$ を $g$ の $y$ 変種とすると、何らかの $g_i$($g_a, g_b, g_c$ のいずれか) に対して $\mathcal{M}, g_i \models (\sim M(y) \wedge L(y,y))$ が成り立つこと、と言い換えられる。

ここで $\mathcal{M}, g_a \models (\sim M(y) \wedge L(y,y))$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_a \not\models M(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_a \models L(y,y)$ である。$g_a(y) = a \in \mathcal{F}(M)$ から $\mathcal{M}, g_a \models M(y)$。よって、$\mathcal{M}, g_a \models (\sim M(y) \wedge L(y,y))$ は成り立たない。

また、$\mathcal{M}, g_b \models (\sim M(y) \wedge L(y,y))$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_b \not\models M(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_b \models L(y,y)$ である。ここで $g_b(y) = b \in \mathcal{F}(M)$ から $\mathcal{M}, g_b \models M(y)$。ゆえに、$\mathcal{M}, g_b \not\models \sim M(y)$。したがって、$\mathcal{M}, g_b \models (\sim M(y) \wedge L(y,y))$ は成り立たない。

また、$\mathcal{M}, g_c \models (\sim M(y) \wedge L(y,y))$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_c \not\models M(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_c \models L(y,y)$ である。ここで、$g_c(y) = c \notin \mathcal{F}(M)$ から $\mathcal{M}, g_c \models \sim M(y)$。しかし、$\mathcal{M}, g_c \not\models L(y,y)$ である。ゆえに、$\mathcal{M}, g_c \not\models (M(y) \wedge L(y,y))$

以上から、「どの $g$ の $y$ 変種 $g'$ に対しても $\mathcal{M}, g' \not\models (\sim M(y) \wedge L(y,y))$」となることが分かった。ゆえに、与えられたモデル $\mathcal{M}$ における与式の真理値は偽である。

(3) $\forall x(M(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$

**解答**: 任意の割り当て関数 $g$ に対して、$\mathcal{M}, g \models \forall x(M(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ であるための必要十分条件は、$g$ のどの $x$ 変種 $g'$ に対しても $\mathcal{M}, g' \models (M(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ であること。

ここで $D = \{a,b,c\}$ であるから、$g_a(y) = a$、$g_b(y) = b$、$g_c(y) = c$ であるような $g_a, g_b, g_c$ を $g$ の $y$ 変種とすると、どの $g_i$($g_i$ は $g_a, g_b, g_c$ を表す) に対しても $\mathcal{M}, g_i \models (M(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つこと、と言い換えられる。

(a) $\mathcal{M}, g_a \models (M(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ であるかどうかを調べる。これが成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_a \not\models M(x)$、または $\mathcal{M}, g_a \models \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ 。ここで、$a \in \mathcal{F}(M)$ なので、 $\mathcal{M}, g_a \not\models M(x)$ は成り立たない。

また、$\mathcal{M}, g_a \models \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つための必要十分条件は、$g_a$ の何らかの $y$ 変種 $g'$ に対して $\mathcal{M}, g' \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つこと。ここで $D = \{a,b,c\}$ であるから、$g_{aa}(y) = a$、$g_{ab}(y) = b$、$g_{ab}(y) = c$ であるような $g_{aa}, g_{ab}, g_{ac}$ を $g_a$ の $y$ 変種とすると、何らかの $g_i$($g_{aa}, g_{ab}, g_{ac}$ のいずれか) に対して $\mathcal{M}, g_i \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ n が成り立つこと、と言い換えられる。

(aa) $\mathcal{M}, g_{aa} \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ であるかどうかを調べる。これが成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_{aa} \models M(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_{aa} \models L(x,y)$ 。ここで、$a \in \mathcal{F}(M)$、かつ $\langle a,a \rangle \in \mathcal{F}(L)$ であるから、これは成り立つ。

ゆえに、 $\mathcal{M}, g_{aa} \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つことが分かったから、$\mathcal{M}, g_a \models (M(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ は成立する。

(b) $\mathcal{M}, g_b \models (M(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ であるかどうかを調べる。これが成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_b \not\models M(x)$、または $\mathcal{M}, g_b \models \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ 。ここで、$b \in \mathcal{F}(M)$ なので、 $\mathcal{M}, g_b \not\models M(x)$ は成り立たない。

また、$\mathcal{M}, g_a \models \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つための必要十分条件は、$g_b$ の何らかの $y$ 変種 $g'$ に対して $\mathcal{M}, g' \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つこと。ここで $D = \{a,b,c\}$ であるから、$g_{ba}(y) = a$、$g_{bb}(y) = b$、$g_{bc}c(y) = c$ であるような $g_{ba}, g_{bb}, g_{bc}$ を $g_b$ の $y$ 変種とすると、何らかの $g_i$($g_{ba}, g_{bb}, g_{bc}$ のいずれか) に対して $\mathcal{M}, g_i \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ n が成り立つこと、と言い換えられる。

(ba) $\mathcal{M}, g_{ba} \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ であるかどうかを調べる。これが成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_{ba} \models M(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_{ba} \models L(x,y)$ 。ここで、$a \in \mathcal{F}(M)$、であるが $\langle b,a \rangle \in \mathcal{F}(L)$ であるから、これは成り立たない。

(bb) $\mathcal{M}, g_{bb} \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ であるかどうかを調べる。これが成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_{bb} \models M(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_{bb} \models L(x,y)$ 。ここで、$b \in \mathcal{F}(M)$、であり、かつ $\langle b, a\rangle \in \mathcal{F}(L)$ であるから、これは成り立つ。

ゆえに、 $\mathcal{M}, g_{bb} \models (M(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つことが分かったから、$\mathcal{M}, g_b \models (M(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ は成立する。

(c) $\mathcal{M}, g_c \models (M(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ であるかどうかを調べる。これが成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_c \not\models M(x)$、または $\mathcal{M}, g_c \models \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ 。ここで、$c \notin \mathcal{F}(M)$ なので、 $\mathcal{M}, g_c \not\models M(x)$ が成り立つ。ゆえに、$\mathcal{M}, g_c \models (M(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ は成立する。

以上から、$g$ のどの $x$ 変種 $g'$ に対しても $\mathcal{M}, g' \models (M(x) \rightarrow \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$ が成立した。ゆえに、与えられたモデル $\mathcal{M}$ における与式の真理値は真である。