2011年度「論理と意味論」試験—解答

出題者: 白井 英俊 (中京大学情報理工学部)

2012年1月24日 4限目 (14:30–15:30, 824教室)

I. p, q, r を任意の命題を表わす命題変項とすると、以下の論理式が命題論理の恒真式であることを真理値表を用いて証明せよ。

$$\{(p \to q \vee r) \wedge \sim r\} \to (p \to q)$$

解答: 与式の真理値表は以下のように求められる.

p	q	r	$\alpha = q \vee r$	$\beta = p \to \alpha$	$\sim r$	$\gamma = \beta \wedge \sim r$	$\delta = p \to q$	$\gamma \to \delta$
T	T	T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

以上から、どのモデルにおいても与式は真となることが分かった。ゆえに、与式は恒真式である。

II. *Boy*, *Girl* を一項述語、*Like* を二項述語とする (例えば、$Boy(x)$ を「x は男の子である」、$Girl(x)$ を「x は女の子である」、$Like(x, y)$ を「x は y が好きである」をそれぞれ表す述語と考えよ)。そして、

(A) $\forall x(Boy(x) \vee Girl(x))$

(B) $\forall x(Boy(x) \to \exists y Like(x, y))$

(C) $\exists y(Girl(y) \wedge \forall x(Boy(x) \to Like(x, y)))$

とする。

モデルを $M = \langle D, F \rangle$、定義域 D を $\{a, b, c, d, e\}$ とする。また解釈関数 F について、$F(Boy) = \{a, b\}$、$F(Girl) = \{c, d\}$、$F(Like) = \{\langle a, c\rangle, \langle a, e\rangle, \langle b, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, a\rangle\}$ であるとしたとき、(A), (B), (C)、それぞれの真理値を求めよ (注意: 値を求める過程も記せ)。

解答:

(A) $\forall x(Boy(x) \vee Girl(x))$

与式がモデル M で真であるための必要十分条件は、任意の割り当て関数 g に対して $M, g \models \forall x(Boy(x) \vee Girl(x))$ であること。そしてそのための必要十分条件は、g のどの x 変種 g' に対しても $M, g' \models (Boy(x) \vee Girl(x))$ であること。ここで $D = \{a, b, c, d, e\}$ であるから、$g_a(x) = a$、$g_b(x) = b$、$g_c(x) = c$、$g_d(x) = d$、$g_e(x) = e$ であるような g_a, g_b, g_c, g_d, g_e を g の x 変種とすると、先の条件はすなわち「$M, g_i \models (Boy(x) \vee Girl(x))$ がどの g_i に対しても成り立つこと」(ここで、g_i は g_a, g_b, g_c, g_d, g_e を表す) と言い換えられる。

ここで $M, g_a \models (Boy(x) \vee Girl(x))$ であるための必要十分条件は、$M, g_a \models Boy(x)$ または $M, g_a \models Girl(x)$ である。

$g_a(x) = a \in F(Boy)$ から $M, g_a \models Boy(x)$。ゆえに、$M, g_a \models (Boy(x) \vee Girl(x))$ である。

同様にして、$M, g_b \models (Boy(x) \vee Girl(x))$, $M, g_c \models (Boy(x) \vee Girl(x))$, $M, g_d \models (Boy(x) \vee Girl(x))$ が成り立つ。しかし、$M, g_e \not\models (Boy(x) \vee Girl(x))$ である。

以上から、「g のどの x 変種 g' に対しても $M, g' \models (Boy(x) \vee Girl(x))$」とはならないことが分かった。ゆえに、与えられたモデル M における与式の真理値は偽である。

(B) $\forall x(Boy(x) \to \exists y Like(x, y))$

解答: 与式がモデル M で真であるための必要十分条件は、任意の割り当て関数 g に対して、$M, g \models \forall x(Boy(x) \to \exists y Like(x, y))$ であること。そしてそのための必要十分条件は、g の任意の x 変種 g' に対して $M, g' \models (Boy(x) \to \exists y Like(x, y))$ であること。

ここで $D = \{a, b, c, d, e\}$ であるから、$g_a(x) = a$、$g_b(x) = b$、$g_c(x) = c$、$g_d(x) = d$、$g_e(x) = e$ であるような g_a, g_b, g_c, g_d, g_e を g の x 変種とすると、「$M, g_i \models (Boy(x) \to \exists y Like(x, y))$ がどの g_i に対しても成り立つこと」(ここで、g_i は g_a, g_b, g_c, g_d, g_e を表す) と言い換えられる。

ここで $M, g_a \models (Boy(x) \to \exists y Like(x, y))$ であるための必要十分条件は、$M, g_a \not\models Boy(x)$、または、$M, g_a \models \exists y Like(x, y)$ である。$g_a(y) = a \in F(Boy)$ から $M, g_a \models Boy(x)$。そこで、$M, g_a \models \exists y Like(x, y)$ であるかどうかを調べる。そのための必要十分条件は、g_a のある y 変種 g' に対して、$M, g' \models Like(x, y)$ となること。これは、g_a の y 変種 g_{ac} を考えると (ただし g_{ac} は $g_{ac}(x) = a, g_{ac}(y) = c$ となるような割り当て関数)、この式は成り立つ。ゆえに、$M, g_a \models \exists y Like(x, y)$ である。したがって、$M, g_a \models (Boy(x) \to \exists y Like(x, y))$ 　が成り立つ。

同様にして、$M, g_i \models (Boy(x) \rightarrow \exists y Like(x, y))$ がどの g_i (ここで g_i は g_a, g_b, g_c, g_d, g_e を表す) に対しても成り立つことが言える。

以上から、「任意の割り当て関数 g に対して、$M, g \models \forall x(Boy(x) \rightarrow \exists y Like(x, y))$ である」ことが示されたから、与えられたモデル M における与式の真理値は真である。

(C) $\exists y(Girl(y) \wedge \forall x(Boy(x) \rightarrow Like(x, y)))$

解答: 与式がモデル M で真であるための必要十分条件は、任意の割り当て関数 g に対して、$M, g \models \exists y(Girl(y) \wedge \forall x(Boy(x) \rightarrow Like(x, y)))$ であること。そのための必要十分条件は、g の任意の y 変種 g'' に対して $M, g'' \models (Girl(y) \wedge \forall x(Boy(x) \rightarrow Like(x, y)))$ が成り立つこと。

ここで $D = \{a, b, c, d, e\}$ であるから、$g_a(y) = a$、$g_b(y) = b$、$g_c(y) = c$、$g_d(y) = d$、$g_e(y) = e$ であるような g_a, g_b, g_c, g_d, g_e を g の y 変種とすると、$M, g_i \models (Girl(y) \wedge \forall x(Boy(x) \rightarrow Like(x, y)))$ がある g_i に対して成り立つこと (ここで、g_i は g_a, g_b, g_c, g_d, g_e を表す) と言い換えられる。

ここで $M, g_a \models (Girl(y) \wedge \forall x(Boy(x) \rightarrow Like(x, y)))$ であるための必要十分条件は、$M, g_a \models Girl(y)$、かつ $M, g_a \models \forall x(Boy(x) \rightarrow Like(x, y)))$ であること。ここで $g_a(y) = a \notin F(Girl)$ から $M, g_a \not\models Girl(y)$。ゆえに、$M, g_a \not\models (Girl(y) \wedge \forall x(Boy(x) \rightarrow Like(x, y)))$

同様に、どの g_i(ここで g_i は g_b, g_c, g_d, g_e とする) に対しても $M, g_i \not\models (Girl(y) \wedge \forall x(Boy(x) \rightarrow Like(x, y)))$。ゆえに、与えられたモデル M における与式の真理値は偽である。

III. 以下のそれぞれの式に対し、同値な冠頭連言標準形を求めよ。必ず計算過程を示すこと。

(1) $\forall x\{P(x) \rightarrow \exists y \sim (Q(x, y) \rightarrow P(y))\}$

解答:

- (空虚な量化子の削除) — 適用されない
- (変項の付け変え) — 適用されない
- (含意の扱い)
  $\forall x\{\sim P(x) \vee \exists y \sim (\sim Q(x, y) \vee P(y))\}$
- (否定記号の扱い)
  $$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \forall x\{\sim P(x) \vee \exists y(\sim\sim Q(x, y) \wedge \sim P(y))\} \\ &\Longrightarrow \quad \forall x\{\sim P(x) \vee \exists y(Q(x, y) \wedge \sim P(y))\} \end{aligned}$$
- (量化子の移動)
  $\forall x \exists y\{\sim P(x) \vee (Q(x, y) \wedge \sim P(y))\}$
- (連言形へ)
  $\forall x \exists y\{(\sim P(x) \vee Q(x, y)) \wedge (\sim P(x) \vee \sim P(y))\}$

(2) $\exists x[\forall z(\exists y P(x,y) \to Q(x)) \to \{\exists y Q(y) \to R(x)\}]$

解答:

- (空虚な量化子の削除)
  $\exists x[(\exists y P(x,y) \to Q(x)) \to \{\exists y Q(y) \to R(x)\}]$
- (変項の付け変え)
  $\exists x[(\exists y P(x,y) \to Q(x)) \to \{\exists z Q(z) \to R(x)\}]$
- (含意の扱い)
  $\exists x[\sim (\sim \exists y P(x,y) \vee Q(x)) \vee \{\sim \exists z Q(z) \vee R(x)\}]$
- (否定記号の扱い)
  $$\Longrightarrow \quad \exists x[(\sim\sim \exists y P(x,y) \wedge \sim Q(x)) \vee \{\forall z \sim Q(z) \vee R(x)\}]$$
  $$\Longrightarrow \quad \exists x[(\exists y P(x,y) \wedge \sim Q(x)) \vee \{\forall z \sim Q(z) \vee R(x)\}]$$
- (量化子の移動)
  $\exists x \exists y \forall z[(P(x,y) \wedge \sim Q(x)) \vee \sim Q(z) \vee R(x)]$
- (連言形へ)
  $\exists x \exists y \forall z[(P(x,y) \vee \sim Q(z) \vee R(x)) \wedge (\sim Q(x) \vee \sim Q(z) \vee R(x))]$

(3) $\forall x \sim \forall u[\exists z P(u,z) \wedge \exists y\{Q(u,y) \to Q(y,u)\}]$

解答:

- (空虚な量化子の削除)
  $\sim \forall u[\exists z P(u,z) \wedge \exists y\{Q(u,y) \to Q(y,u)\}]$
- (変項の付け変え) — 適用しない
- (含意の扱い)
  $\sim \forall u[\exists z P(u,z) \wedge \exists y\{\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)\}]$
- (否定記号の扱い)
  $$\Longrightarrow \quad \exists u \sim [\exists z P(u,z) \wedge \exists y\{\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)\}]$$
  $$\Longrightarrow \quad \exists u[\sim \exists z P(u,z) \vee \sim \exists y\{\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)\}]$$
  $$\Longrightarrow \quad \exists u[\forall z \sim P(u,z) \vee \forall y \sim \{\sim Q(u,y) \vee Q(y,u)\}]$$
  $$\Longrightarrow \quad \exists u[\forall z \sim P(u,z) \vee \forall y\{\sim\sim Q(u,y) \wedge \sim Q(y,u)\}]$$
  $$\Longrightarrow$$
- (量化子の移動)
  $\exists u[\forall z \sim P(u,z) \vee \forall y\{Q(u,y) \wedge \sim Q(y,u)\}]$ $\exists u \forall z \forall y[\sim P(u,z) \vee \{Q(u,y) \wedge \sim Q(y,u)\}]$
- (連言形へ)
  $\exists u \forall z \forall y\{(\sim P(u,z) \vee Q(u,y)) \wedge (\sim P(u,z) \vee \sim Q(y,u)\}$