2013 年度「論理と意味論／数理論理学 I」解答

出題者: 白井 英俊 (中京大学情報理工学部)

注意: 許可された用紙一枚のみ持ち込みを許可する。試験時間は 60 分。

1. (20 点) p, q, r を任意の命題を表わす命題変項とすると、以下の論理式が命題論理の恒真式であることを真理値表を用いて **証明せよ**。

$$((p \to q) \ \wedge (\sim q \vee r)) \to (p \to r))$$

解答: 与式の真理値表は以下のように求められる.

p	q	r	$\alpha =$ $p \to q$	$\sim q$	$\beta =$ $\sim q \vee r$	$\gamma =$ $\alpha \wedge \beta$	$\delta =$ $p \to r$	$\gamma \to \delta$
T	T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

以上から、どのモデルにおいても与式は真となることが分かった。ゆえに、与式は恒真式である。

2. 以下の式に対する同値な冠頭連言標準形を求めよ。ただし、計算過程も書くこと。

(a) $\sim \forall x[\{P(x) \to \exists y(Q(x,y) \wedge R(y))\} \wedge \forall z \exists x S(x,z)]$

解答:

1. (空虚な量化子の削除) —変化なし
2. (変項の付け変え): — 後の $\exists x$ を $\exists u$ に
   $\sim \forall x[\{P(x) \to \exists y(Q(x,y) \wedge R(y))\} \wedge \forall z \exists u S(u,z)]$
3. (含意式の変換)
   $\sim \forall x[\{\sim P(x) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge R(y))\} \wedge \forall z \exists u S(u,z)]$
4. (否定の移動)
   $\exists x \sim [\{\sim P(x) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge R(y))\} \wedge \forall z \exists u S(u,z)]$
   $\exists x[\sim \{\sim P(x) \vee \exists y(Q(x,y) \wedge R(y))\} \vee \sim \forall z \exists u S(u,z)]$
   $\exists x[\{\sim\sim P(x) \wedge \sim \exists y(Q(x,y) \wedge R(y))\} \vee \exists z \sim \exists u S(u,z)]$
   $\exists x[\{P(x) \wedge \forall y \sim (Q(x,y) \wedge R(y))\} \vee \exists z \forall u \sim S(u,z)]$
   $\exists x[\{P(x) \wedge \forall y(\sim Q(x,y) \vee \sim R(y))\} \vee \exists z \forall u \sim S(u,z)]$
5. (冠頭形へ) (注意: $\forall y$ と $\forall u$ の順番は任意)
   $\exists x \exists z \forall y \forall u[\{P(x) \wedge (\sim Q(x,y) \vee \sim R(y))\} \vee \sim S(u,z)]$
6. (冠頭連言標準形)
   $\exists x \exists z \forall y \forall u[(P(x) \vee \sim S(u,z)) \wedge (\sim Q(x,y) \vee \sim R(y) \vee \sim S(u,z))\}]$

答: $\exists x \exists z \forall y \forall u[(P(x) \vee \sim S(u,z)) \wedge (\sim Q(x,y) \vee \sim R(y) \vee \sim S(u,z))\}]$

(b) $\exists x \sim [\{\sim P(x) \wedge \forall y Q(x,y)\} \to \exists z \forall y (S(x,z) \to R(y,z))]$

解答:

1. (空虚な量化子の削除) —変化なし
2. (変項の付け変え):—後の $\exists y$ を $\forall w$ に

   $\exists x \sim [\{\sim P(x) \wedge \forall y Q(x,y)\} \to \exists z \forall w (S(x,z) \to R(w,z))]$
3. (含意式の変換)

   $\exists x \sim [\sim \{\sim P(x) \wedge \forall y Q(x,y)\} \vee \exists z \forall w (\sim S(x,z) \vee R(w,z))]$
4. (否定の移動)

   $\exists x [\sim\sim \{\sim P(x) \wedge \forall y Q(x,y)\} \wedge \sim \exists z \forall w (\sim S(x,z) \vee R(w,z))]$

   $\exists x [\{\sim P(x) \wedge \forall y Q(x,y)\} \wedge \forall z \sim \forall w (\sim S(x,z) \vee R(w,z))]$

   $\exists x [\{\sim P(x) \wedge \forall y Q(x,y)\} \wedge \forall z \exists w \sim (\sim S(x,z) \vee R(w,z))]$

   $\exists x [\{\sim P(x) \wedge \forall y Q(x,y)\} \wedge \forall z \exists w (\sim\sim S(x,z) \wedge \sim R(w,z))]$

   $\exists x [\{\sim P(x) \wedge \forall y Q(x,y)\} \wedge \forall z \exists w (S(x,z) \wedge \sim R(w,z))]$
5. (冠頭形へ)

   $\exists x \forall z \exists w \forall y [\{\sim P(x) \wedge Q(x,y)\} \wedge (S(x,z) \wedge \sim R(w,z))]$
6. (冠頭連言標準形) 上式は既にそうなっている

   答 (不要な括弧を外して):

   $\exists x \forall z \exists w \forall y [\sim P(x) \wedge Q(x,y) \wedge S(x,z) \wedge \sim R(w,z)]$

3. 一階述語論理のモデル $\mathcal{M} = \langle D, F \rangle$ の定義域を $D = \{a,b,c,d\}$ とし、解釈関数 F を以下のように定めたとする。

$$
\begin{array}{lcl}
F(M) & = & \{a,b\} \\
F(G) & = & \{c,d\} \\
F(L) & = & \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,a\rangle, \langle d,d\rangle\}
\end{array}
$$

以下のそれぞれの論理式に対し、このモデルにおける真理値を求めよ。ただし、計算過程も書くこと。

(a) $\exists x (G(x) \wedge L(x,x))$

解答:$\mathcal{M} \models \exists x (G(x) \wedge L(x,x))$ であるための必要十分条件は、任意の割り当て関数 g に対して、$\mathcal{M}, g \models \exists x (G(x) \wedge L(x,x))$ であること。

これが成り立つための必要十分条件は、g のなんらかの x 変種 g'(ここで g' は $D = \{a,b,c,d\}$ より、g_a, g_b, g_c, g_d のいずれか。ただし、$g_a(x) = a, g_b(x) = b, g_c(x) = c, g_d(x) = d$) において、$\mathcal{M}, g' \models (G(x) \wedge L(x,x))$ であることである。

(1) $\mathcal{M}, g_a \models (G(x) \wedge L(x,x))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_a \models G(x)$、かつ $\mathcal{M}, g_a \models L(x,x)$ であること。ここで $g_a(x) = a \notin F(G)$ であるため、これは成り立たない。

(2) $\mathcal{M}, g_b \models (G(x) \wedge L(x,x))$ が成り立つかどうか同様に調べる。これも $g_b(x) = b \notin F(G)$ であるため、これは成り立たない。

(3) $\mathcal{M}, g_c \models (G(x) \wedge L(x,x))$ が成り立つかどうか同様に調べる。
$g_c(x) = c \in F(G)$ であるため条件の一つは満たす。しかし、$\langle g(x), g(x)\rangle = \langle c,c\rangle \notin F(L)$ であるため $\mathcal{M}, g_c \not\models (G(x) \wedge L(x,x))$。

(4) $\mathcal{M}, g_d \models (G(x) \wedge L(x,x))$ が成り立つかどうか同様に調べる。
$g_d(x) = d \in F(G)$ であり、$\langle g(x), g(x)\rangle = \langle d,d\rangle \in F(L)$ より $\mathcal{M}, g_d \models$

$(G(x) \wedge L(x,x))$。

以上から、$\mathcal{M}, g \models \exists x(G(x) \wedge L(x,x))$ となることが分かった。ゆえに与式は真である。

(b) $\forall x(M(x) \to \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$

解答: $\mathcal{M} \models \forall x(M(x) \to \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$ であるための必要十分条件は、任意の割り当て関数 g に対して、$\mathcal{M}, g \models \forall x(M(x) \to \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$ であること。

これが成り立つための必要十分条件は、g のどの x 変種 g'（ここで g' は $D = \{a,b,c,d\}$ より、g_a, g_b, g_c, g_d のいずれか。ただし、$g_a(x) = a, g_b(x) = b, g_c(x) = c, g_d(x) = d$) に対しても、$\mathcal{M}, g' \models (M(x) \to \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$ であることである。

(1) $\mathcal{M}, g_a \models (M(x) \to \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_a \not\models M(x)$、もしくは $\mathcal{M}, g_a \models \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つこと。

ここで、$g_a(x) = a \in F(M)$ より、$\mathcal{M}, g_a \models \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ でなければならないことがわかる。

そのための必要十分条件は、なんらかの g_a の y 変種 g'_a ($D = \{a,b,c,d\}$ より、g'_a は $g_{aa}, g_{ab}, g_{ac}, g_{ad}$ のいずれか。ただし、$g_{aa}(y) = a, g_{ab}(y) = b, g_{ac}(y) = c, g_{ad}(y) = d$) に対し、 $\mathcal{M}, g'_a \models (G(y) \wedge L(x,y))$ であること。

(1a) $\mathcal{M}, g_{aa} \models (G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_{aa} \models G(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_{aa} \models L(x,y)$ であることである。ここで、$g_{aa}(y) = a \notin F(G)$ より、成り立たないことがわかる。

(1b) $\mathcal{M}, g_{ab} \models (G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_{ab} \models G(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_{ab} \models L(x,y)$ であることである。ここで、$g_{ab}(y) = b \notin F(G)$ より、成り立たないことがわかる。

(1c) $\mathcal{M}, g_{ac} \models (G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_{ac} \models G(y)$、かつ $\mathcal{M}, g_{ac} \models L(x,y)$ であることである。ここで、$g_{ac}(y) = c \in F(G)$、かつ $\langle g_{ac}(x), g_{ac}(y) \rangle = \langle a, c \rangle \in F(L)$ より成り立つ。

以上から、少くとも (1c) が成り立つことがわかったので、$\mathcal{M}, g_a \models \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つこと言えた。

(2) $\mathcal{M}, g_b \models (M(x) \to \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は (1) と同様、$\mathcal{M}, g_b \not\models M(x)$、もしくは $\mathcal{M}, g_b \models \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つこと。

ここで、$g_b(x) = b \in F(M)$ より、$\mathcal{M}, g_b \models \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ でなければならないことがわかる。

そのための必要十分条件は、なんらかの g_b の y 変種 g'_b ($D = \{a,b,c,d\}$ より、g'_b は $g_{ba}, g_{bb}, g_{bc}, g_{bd}$ のいずれか。ただし、$g_{ba}(y) = a, g_{bb}(y) = b, g_{bc}(y) = c, g_{bd}(y) = d$) に対し、 $\mathcal{M}, g'_b \models (G(y) \wedge L(x,y))$ であること。

(1) と同様に調べると、少なくとも $\mathcal{M}, g_{bb} \models (G(y) \wedge L(x,y))$ であることがわかる。($\because$ $g_{bb}(y) = b \in F(G)$ かつ、$\langle g_{bb}(x), g_{bb}(y) \rangle = \langle b, b \rangle \in F(L)$) ゆえに、 $\mathcal{M}, g_b \models \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つこと言えた。

(3) $\mathcal{M}, g_c \models (M(x) \to \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$ が成り立つかどうか調べる。その必要

十分条件は (1) と同様、$\mathcal{M}, g_c \not\models M(x)$、もしくは $\mathcal{M}, g_c \models \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つこと。

ここで、 $g_c(x) = c \notin F(M)$ であるので、$\mathcal{M}, g_c \models \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つこと言えた。

(4) $\mathcal{M}, g_c \models (M(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge L(x,y)))$ も (3) と同様に成り立つ。

以上から、(1)〜(4) はみな成立することが言えたので、$\{calM\}, g \models M(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge L(x,y))$ が成り立つことがわかった。ゆえに、与式はこのモデルにおいて真である。

(c) $\exists y(G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$

解答: $\mathcal{M} \models \exists y(G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$ であるための必要十分条件は、任意の割り当て関数 g に対して、$\mathcal{M}, g \models \exists x(G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$ であること。

これが成り立つための必要十分条件は、g の何らかの y 変種 g'（ここで g' は $D = \{a,b,c,d\}$ より、g_a, g_b, g_c, g_d のいずれか。ただし、$g_a(y) = a, g_b(y) = b, g_c(y) = c, g_d(y) = d$) に対して、$\mathcal{M}, g' \models (G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$ であることである。

(1) $\mathcal{M}, g_a \models (G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_a \models G(y)$ かつ $\mathcal{M}, g_a \models \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y))$ が成り立つこと。

ここで、$g_a(y) = a \notin F(G)$ より、これは成り立たないことがわかる。

(2) $\mathcal{M}, g_b \models (G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$ が成り立つかどうか調べる。これは (1) と同様に、$g_b(y) = b \notin F(G)$ より、これは成り立たないことがわかる。

(3) $\mathcal{M}, g_c \models (G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_c \models G(y)$ かつ $\mathcal{M}, g_c \models \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y))$ が成り立つこと。

ここで、$g_c(y) = c \in F(G)$ である。そこで $\mathcal{M}, g_c \models \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y))$ が成り立つかどうか調べる。このための必要十分条件は、g_c のどの x 変種 g'_c に対しても（ここで g' は $D = \{a,b,c,d\}$ より、$g_{ca}, g_{cb}, g_{cc}, g_{cd}$ のいずれか。ただし、$g_{ca}(x) = a, g_{cb}(x) = b, g_{cc}(x) = c, g_{cd}(x) = d$) において、$\mathcal{M}, g'_c \models (M(x) \rightarrow L(x,y))$ であることである。

(3a) $\mathcal{M}, g_{ca} \models (M(x) \rightarrow L(x,y))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_{ca} \not\models M(x)$ もしくは、$\mathcal{M}, g_{ca} \models L(x,y)$ であること。

ここで、$\langle g_{ca}(x), g_{ca}(y) \rangle = \langle a, c \rangle \in F(L)$ より、 $\mathcal{M}, g_{ca} \models (M(x) \rightarrow L(x,y))$ は成り立つ。

(3b) $\mathcal{M}, g_{cb} \models (M(x) \rightarrow L(x,y))$ が成り立つかどうか調べる。その必要十分条件は $\mathcal{M}, g_{cb} \not\models M(x)$ もしくは、$\mathcal{M}, g_{ca} \models L(x,y)$ であること。

ここで、$g_{cb}(x) = b \in F(M)$ なので、$\mathcal{M}, g_{cb} \not\models M(x)$ は成り立たない。また、$\langle g_{cb}(x), g_{cb}(y) \rangle = \langle b, c \rangle \notin F(L)$ でもある。以上から、 $\mathcal{M}, g_{cb} \models (M(x) \rightarrow L(x,y))$ は成り立たない。

ここで、(3b) が成り立たなかったので、$\mathcal{M}, g_c \models \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y))$ は成り立たないことがわかった。

(4) $\mathcal{M}, g_d \models (G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$ が成り立つかどうか調べると、(3) と同様に成り立たないことがわかる。以上から、(1)〜(4) のすべてが成り立たな

いため、$\mathcal{M}, g \models \exists y(G(y) \wedge \forall x(M(x) \rightarrow L(x,y)))$ は成り立たない。ゆえに、与式は偽である。

4. (救済問題) 次の質問に答えよ:

   殺人事件が起こった。容疑者3人 (Andy、Bill、Chap としておく) が呼び出され、尋問された。Andy は自分は殺していないと言った。Bill は自分が殺したと言った。Chap は Bill が犯人だと述べた。

   このままでは Bill が犯人と思われたが、捜査の結果、次のことが判明した。

   殺人は単独犯 (つまり、犯人は一人) で、尋問では嘘を言っていた。また、他の容疑者の少くとも一人は本当のことを言っていた。

   さて、以上のことから、誰が犯人と考えられるか、理由もあわせて述べよ。

   解答:

   Bill が犯人とすると、「尋問では嘘を言っていた」ということから、「自分が殺した」という証言と矛盾する。ゆえに Bill は犯人ではない。そこで、(1) Andy が犯人の場合と、(2)Chap が犯人の場合の二通りの場合を考えてみる。

   (1) では Andy の証言「自分は殺していない」が嘘となり、Andy が犯人であるという仮定と矛盾しない。また Bill の証言も嘘となる。したがって、「他の容疑者の少くとも一人は本当のことを言っていた」という条件から、Chap の証言「Bill が犯人だ」が本当でなければばならない。しかし、これは仮定と矛盾する。ゆえに (1) は成り立たない。

   (2) の場合、Chap の証言「Bill が犯人だ」が嘘となり、 Chap が犯人であるという仮定と矛盾しない。Bill の証言も嘘となる。一方、Andy の証言「自分は殺していない」は本当になり、「他の容疑者の少くとも一人は本当のことを言っていた」という条件を満たす。ゆえに (2) だけが無矛盾である。よって Chap が犯人である。