「量化詞をもつ論理式の解釈」をよりよく理解するために

白井 英俊 (中京大学情報理工学部)

- 一階述語論理の量化詞は 2 種類ある: 全称量化詞 $\forall$ と存在量化詞 $\exists$ である
- 全称量化詞をもつ論理式は、一般に $\forall x\phi$ という形をとる。

  この論理式の意味するところは「世界中のあらゆるモノをそれぞれ x に当てはめて考えると、その**全ての場合において** ϕ が真となる」、ということ

  ここで ϕ には $man(x) \vee woman(x)$ や $boy(x) \rightarrow \exists y(woman(y) \wedge love(x, y))$ のような論理式がはいる。また、x は変項であり、x 以外に $u, v, y, z, x_1, \ldots$ のような記号が使われる
- 存在量化詞をもつ論理式は、一般に $\exists x\phi$ という形をとる。

  この論理式の意味するところは「世界中のあらゆるモノを x に当てはめて考えると、その中の一つくらいは ϕ が真となるものが**存在する**」、ということ

  ここで ϕ には $woman(x) \wedge pretty(x)$ や $woman(x) \wedge \forall y(boy(y) \rightarrow love(x, y))$ のような論理式がはいる。また、x は変項であり、全称量化詞の場合と同様、x 以外に $u, v, y, z, x_1, \ldots$ のような記号が使われる
- 論理式の意味は真理値、すなわち真 (**T**rue) か偽 (**F**alse) である。

  論理式の意味は、論理式だけでは決定できず、モデル $\mathcal{M}$ との組合せで決定される。論理式 ϕ がモデル (「世界」に相当) $\mathcal{M}$ で真である（もしくは「成り立つ」）場合に $\mathcal{M} \models \phi$ と書く
- モデル $\mathcal{M}$ を構成するものは、その世界に存在するモノの集合 $\mathcal{D}$ と、解釈関数 $\mathcal{F}$ である。これを $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ と表す。
- 解釈関数 $\mathcal{F}$ は、個体定項 (モノに対する「名前」に相当) や述語がこの世界で何を意味するかを与えるものである。次が成り立つ:

  1. α を個体定項とすると、$\mathcal{F}(\alpha)$ はその世界のモノを与える。つまり、$\mathcal{F}(\alpha) \in \mathcal{D}$
  2. $Pred$ を 1 項述語 (つまり引数が 1 個の述語) とすると、$\mathcal{F}(Pred)$ は、その $Pred$ という述語 (つまり「性質」や「属性」) を満たす世界のモノの集合を返す。言い換えれば、$\mathcal{F}(Pred) \subseteq \mathcal{D}$
  3. $Pred$ を 2 項述語 (つまり引数が 2 個の述語) とすると、$\mathcal{F}(Pred)$ は、その $Pred$ という述語（つまり「関係」）を満たす世界のモノの組(正確には、順序対) の集合を返す。言い換えれば、$\mathcal{F}(Pred) \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D}$
  4. $Pred$ を 3 項述語 (つまり引数が 3 個の述語) とすると、$\mathcal{F}(Pred)$ は、その $Pred$ という述語（つまり「関係」）を満たす世界のモノの 3 つ組の集合を返す。言い換えれば、$\mathcal{F}(Pred) \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$
- 基本論理式の解釈

  1. モデル $\mathcal{M}$ において (基本) 論理式 $Pred(a)$ が真であるための必要十分条件は ($Pred$ が 1 項述語であることに注意)、$\mathcal{F}(a) \in \mathcal{F}(Pred)$ である。
  2. モデル $\mathcal{M}$ において (基本) 論理式 $Pred(a, b)$ が真であるための必要十分条件は (ここでは $Pred$ が 2 項述語であることに注意)、$\langle \mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b) \rangle \in \mathcal{F}(Pred)$ である。
  3. モデル $\mathcal{M}$ において (基本) 論理式 $Pred(a, b, c)$ が真であるための必要十分条件は (ここでは $Pred$ が 3 項述語であることに注意)、$\langle \mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b), \mathcal{F}(c) \rangle \in \mathcal{F}(Pred)$ である。

- 論理結合記号 $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow$ をもつ論理式の場合

  ここでは $\phi \rightarrow \psi$ の場合だけを考える: モデルを $\mathcal{M}$ とすると、$\mathcal{M} \models \phi \rightarrow \psi$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M} \not\models \phi$ もしくは $\mathcal{M} \models \psi$ である。つまり $\mathcal{M} \models \phi$ が**成り立たない**か $\mathcal{M} \models \psi$ が成り立てば、真 (T)、そうでなければ偽 (F)

- $\mathcal{F}$ は変項に対して値を返すことができないことに注意。そこで、変項に対して $\mathcal{D}$ の要素を返すための関数を用意する。これが**割り当て関数**である。

  モデルを $\mathcal{M}$、 割り当て関数を g と書くと、一般的には、どの論理式 ϕ に対しても、「$\mathcal{M} \models \phi$ である」ための必要十分条件は、「どの割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \phi$ であること」となる

- 量化詞を Q で表し (言い換えれば Q は $\forall$ か $\exists$ のどちらか)、変項を u、論理式を ϕ、割り当て関数 g、モデルを $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ とする。また $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ とすると、

  $\mathcal{M}, g \models Qu\phi$ が成り立つかどうかは以下のように判定される:

  (1) **関数** g **の** u **変種**を作る (変項 u に特定の値を割り当てるため)。作るべき関数は $\mathcal{D}$ の要素の個数分である。この場合 $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ なので n 個作ることになる。そこで作られる割り当て関数を $g_1, g_2, \ldots g_n$ とし、$g_1(u) = d_1, g_2(u) = d_2, \ldots, g_n(u) = d_n$ とする。(つまり、変項 u に対して $\mathcal{D}$ の要素をそれぞれ返す割り当て関数を用意する、ということ。ここでの命名の規則は d_i を返す関数の名前を g_i としている)

  (2) (1) で作った関数 g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて $\mathcal{M}, g_i \models \phi$ を調べる

  (3) 元の論理式の量化詞 Q が全称量化詞か、存在量化詞かで、最終的に返す値が異なる:

  $\forall$ (全称量化詞) の場合 : どの g_i に対しても、$\mathcal{M}, g_i \models \phi$ が成り立っていれば、元の $\mathcal{M}, g \models Qu\phi$ が成り立つ（真である)。言い替えれば、一つでも成り立たないものがあれば、不成立 (偽である)

  $\exists$ (存在量化詞) の場合 : $\mathcal{M}, g_i \models \phi$ が成り立つような g_i があれば真 (T) である。言い替えれば、どの g_i に対しても、$\mathcal{M}, g_i \models \phi$ が成り立たなければ偽 (F)

- 論理式が $\forall x \exists y \phi$ や $\exists x \forall y \phi$ のように、量化詞が入れ子になっている場合

  モデルを $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ とする。また $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ とすると、

  $\mathcal{M}, g \models \forall x \exists y \phi$ が成り立つかどうかは以下のように判定される:

  (1) **関数** g **の** x **変種**を作る (変項 x に特定の値を割り当てるため)。先と同様の命名規則によって作られる割り当て関数を $g_1, g_2, \ldots g_n$、ただし $g_1(x) = d_1, g_2(x) = d_2, \ldots, g_n(x) = d_n$ とする。

  (2) (1) で作った関数 g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて $\mathcal{M}, g_i \models \exists y \phi$ を調べる

  (3) どの g_i に対しても、$\mathcal{M}, g_i \models \exists y \phi$ が成り立っていれば、元の $\mathcal{M}, g \models \forall x \exists y \phi$ は成立 (真である)。言い替えれば、一つでも成り立たないものがあれば、元の $\mathcal{M}, g \models \forall x \exists y \phi$ は不成立 (偽である)。

  ここで (2) の $\mathcal{M}, g_i \models \exists y \phi$ の成立／不成立を調べる方法は以下 (上記の (1)~(3) の繰り返し—再帰)。

  (1') **関数** g_i **の** y **変種**を作る (変項 y に特定の値を割り当てるため)。先と同様の命名規則によって作られる割り当て関数を $g_{i1}, g_{i2}, \ldots g_{in}$、ただし $g_{i1}(y) = d_1, g_{i2}(y) = d_2, \ldots, g_{in}(y) = d_n$ とする。

  注意: これらはみな**関数** g_i **の** y **変種**だから、どの $g_{ij} (j = 1, \ldots, n$) に対しても $g_{ij}(x) = d_i$

  (2') (1) で作った関数 g_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて $\mathcal{M}, g_{ij} \models \phi$ を調べる

  (3') ある g_{ij} において、$\mathcal{M}, g_{ij} \models \phi$ が成り立っていれば、元の $\mathcal{M}, g \models \exists y \phi$ が成り立つ (真である)。言い替えれば、どの g_{ij} に対しても $(j = 1, \ldots, n)$、$\mathcal{M}, g_{ij} \models \phi$ が成り立たなければ、元の $\mathcal{M}, g \models \exists y \phi$ は不成立 (偽である)。