「量化詞をもつ論理式の解釈」をよりよく理解するために (2)

白井 英俊 (中京大学情報理工学部)

- 論理式を ϕ で表すと、「モデル $\mathcal{M}$ で ϕ(の真理値) が真」(もしくは「モデル $\mathcal{M}$ で ϕ が成立する」) を

  $$\mathcal{M} \models \phi$$

  と表す。

- 解釈関数 $\mathcal{F}$ は変項に対しては値を持たない。そこで、変項に対して $\mathcal{D}$ の要素を返すための関数を用意する。これが**割り当て関数**である。

  モデルを $\mathcal{M}$、 割り当て関数を g と書くと、一般的には、どの論理式 ϕ に対しても、「$\mathcal{M} \models \phi$ であるための必要十分条件は、どの割り当て関数 g に対しても

  $$\mathcal{M}, g \models \phi$$

  であること、である (ここで下線部を「任意の割り当て関数 g に対しても」と言い換えることもできることに注意)。これを

  $\mathcal{M} \models \phi$ **iff** (どの割り当て関数 g に対しても) $\mathcal{M}, g \models \phi$

  と表す。

  ここで、「α が β の必要十分条件である」とは、「α ならば β でなければならない」(必要条件) と「β であれば α が成り立つ」(十分条件) の両方が成り立つことを意味する。

- ここで変数に対して定義域の要素を割り当てる「割り当て関数」がなぜ出てくるのか、不思議に思うかもしれない。実際、論理式 ϕ に変数がなければ、割り当て関数は論理式の真理値とは無関係である。

  しかし、変数を含む場合は、変数に割り当てる「割り当て関数」を考えなければならなくなるので、「便宜的」にこうするものだと思って欲しい。これが役に立つのは、論理式が量化詞をもつ場合である。

- 全称量化詞をもつ論理式は、一般に $\forall x \phi$ という形をとる。この論理式の意味するところは「世界中のあらゆるモノをそれぞれ x に当てはめて考えると、その**全ての場合において** ϕ が真となる」、ということ

  存在量化詞をもつ論理式は、一般に $\exists x \phi$ という形をとる。この論理式の意味するところは「世界中のあらゆるモノを x に当てはめて考えると、その中の一つくらいは ϕ が真となるものが**存在する**」、ということ

- 量化詞を Q で表し (言い換えれば Q は $\forall$ か $\exists$ のどちらか)、変項を u、論理式を ϕ、割り当て関数 g、モデルを $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ とする。また $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ とすると、

  $\mathcal{M}, g \models Qu\phi$ が成り立つかどうかは以下のように判定される:

  (1) **関数 g の u 変種**を作る (変項 u に特定の値を割り当てるため)。作るべき関数は $\mathcal{D}$ の要素の個数分である。この場合 $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ なので n 個作ることになる。そこで作られる割り当て関数を $g_1, g_2, \ldots g_n$ とし、$g_1(u) = d_1, g_2(u) = d_2, \ldots, g_n(u) = d_n$ とする。(つまり、変項 u に対して $\mathcal{D}$ の要素をそれぞれ返す割り当て関数を用意する、ということ。ここでの命名の規則は d_i を返す関数の名前を g_i としている)

  (2) (1) で作った関数 g_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) を用いて $\mathcal{M}, g_i \models \phi$ を調べる

(3) 元の論理式の量化詞 Q が全称量化詞か、存在量化詞かで、それぞれ調べた $\mathcal{M}, g_i \models \phi$ の真理値と元の式の真理値の関係が異なる。

$\forall$ (全称量化詞) の場合 : どの g_i に対しても $\mathcal{M}, g_i \models \phi$ が成り立つことが元の $\mathcal{M}, g \models Qu\phi$ が成り立つ（真である) ための条件。言い替えれば、一つでも成り立たないものがあれば、不成立 (偽である)

$\exists$ (存在量化詞) の場合 : $\mathcal{M}, g_i \models \phi$ が成り立つような g_i が一つあれば真 (T) である。言い替えれば、どの g_i に対しても $\mathcal{M}, g_i \models \phi$ が成り立たなければ偽 (F)

- 例題: モデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ とし、$\mathcal{D} = \{$ 太郎, ポチ $\}$、$\mathcal{F}(Man) = \{$ 太郎 $\}$, $\mathcal{F}(Dog) = \{$ ポチ $\}$ とする。

  $\mathcal{M} \models \forall x Man(x)$ かどうかを求める:
  これが成り立つための必要十分条件は、どの割り当て関数に対しても $\mathcal{M}, g \models \forall x Man(x)$ であること。

  ここで g の x 変種を g_1, g_2 とし (注意: 2 つしか用意しないのは、割り当て関数が変数に対して返す値の候補が $\mid \mathcal{D} \mid$ 個、つまりこの場合 2 個だからである)、$g_1(x) =$ 太郎, $g_2(x) =$ ポチ、とする。

  すると、$\mathcal{M}, g \models \forall x Man(x)$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_1 \models Man(x)$ かつ$\mathcal{M}, g_2 \models Man(x)$ と書ける (下線部が「かつ」となる理由は、先頭の量化詞が $\forall$ だから)。ここで、**どちらの式においても先頭の $\forall x$ がなくなっている**ことに注意。

  それぞれの式が成り立つかを場合分けして調べる:

  1. $\mathcal{M}, g_1 \models Man(x)$ であるための必要十分条件は、$g_1(x) \in \mathcal{F}(Man)$。ここで、$g_1(x) =$ 太郎 であることから、これは成立する。
  2. $\mathcal{M}, g_2 \models Man(x)$ であるための必要十分条件は、$g_2(x) \in \mathcal{F}(Man)$。ここで、$g_2(x) =$ ポチ であることから、これは成り立たない。

  以上から、「場合分けした**すべての式**が成立したわけではない」ので、元の式 (これを**与式**という) は不成立。故 (ゆえ) に、$\mathcal{M} \not\models \forall x Man(x)$

- 量化詞が存在量化 $\exists$ の場合は、場合分けした式の**少なくともひとつ**が成立することが、 与式が成立するための必要十分条件となる。

  演習問題: $\exists y Dog(y)$ のモデル $\mathcal{M}$ における真理値を求めよ。

- 論理式が $\forall x \exists y \phi$ や $\exists x \forall y \phi$ のように、量化詞が入れ子になっている場合

  モデルを $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ とする。また $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ とすると、

  $\mathcal{M}, g \models \forall x \exists y \phi$ が成り立つかどうかは以下のように判定される:

  (1) **関数 g の x 変種**を作る (変項 x に特定の値を割り当てるため)。先と同様の命名規則によって作られる割り当て関数を $g_1, g_2, \ldots g_n$、ただし $g_1(x) = d_1, g_2(x) = d_2, \ldots, g_n(x) = d_n$ とする。

  (2) (1) で作った関数 g_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて $\mathcal{M}, g_i \models \exists y \phi$ を調べる

  (3) どの g_i に対しても、$\mathcal{M}, g_i \models \exists y \phi$ が成り立っていれば、元の $\mathcal{M}, g \models \forall x \exists y \phi$ は成立 (真である)。言い替えれば、一つでも成り立たないものがあれば、元の $\mathcal{M}, g \models \forall x \exists y \phi$ は不成立 (偽である)。

  ここで (2) の $\mathcal{M}, g_i \models \exists y \phi$ の成立／不成立を調べる方法は以下 (上記の (1)〜(3) の繰り返し—再帰)。

  (1') **関数 g_i の y 変種**を作る (変項 y に特定の値を割り当てるため)。先と同様の命名規則によって作られる割り当て関数を $g_{i1}, g_{i2}, \ldots g_{in}$、ただし $g_{i1}(y) = d_1, g_{i2}(y) = d_2, \ldots, g_{in}(y) = d_n$ とする。

  注意: これらはみな**関数 g_i の y 変種**だから、どの $g_{ij} (j = 1, \ldots, n\ )$ に対しても $g_{ij}(x) = d_i$

  (2') (1) で作った関数 g_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を用いて $\mathcal{M}, g_{ij} \models \phi$ を調べる

  (3') ある g_{ij} において、$\mathcal{M}, g_{ij} \models \phi$ が成り立っていれば、元の $\mathcal{M}, g \models \exists y \phi$ が成り立つ (真である)。言い替えれば、どの g_{ij} に対しても $(j = 1, \ldots, n)$、$\mathcal{M}, g_{ij} \models \phi$ が成り立たなければ、元の $\mathcal{M}, g \models \exists y \phi$ は不成立 (偽である)。