「論理と意味論」資料　　　　　　　　白井英俊　　2014-07-18

1. 一階述語論理の論理式の解釈

今考えるモデルを M2= <D2, F2>、ただし
D2= { 太郎、花子、ポチ}　　　　F2（a)= 太郎, F2(b)=花子、F2(c)=ポチ
F2(Human)= { 太郎、花子}, F2(Dog)= {ポチ},
F2(Like) = { <太郎、花子>, <ポチ,太郎>,<太郎、ポチ>, <ポチ,花子>}
とする。

(3) $\exists x(Dog(x) \wedge \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y)))$ の真理値を求めよ

解答例: モデル M2 で与式が真である(これを $M2 \vDash \exists x(Dog(x) \wedge \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y)))$ と書く)ための必要十分条件は、定義域 D2 の要素数が 3 であることから、互いに x 変種な関係にある割り当て関数 g_1, g_2, g_3 に対して(ここで、 $g_1(x)$=太郎、$g_2(x)$=花子, $g_3(x)$=ポチ) 次の**(a), (b), (c)の<u>いずれか</u>が成り立つこと**である:

(a) g_1 の元で $Dog(x) \wedge \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y))$が真 (これを $M2, g_1 \vDash Dog(x) \wedge \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y))$ と書く)

(b) $M2, g_2 \vDash Dog(x) \wedge \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y))$

(c) $M2, g_3 \vDash Dog(x) \wedge \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y))$

(a)が成り立つための必要十分条件は、 $M2, g_1 \vDash Dog(x)$ かつ、$M2, g_1 \vDash \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y))$ であること。ここで、 太郎 $\notin$ F2(Dog)であるから、これは成立しない。
同様に、(b)も不成立
また(c) が成り立つための必要十分条件は、 $M2, g_3 \vDash Dog(x)$ かつ、$M2, g_3 \vDash \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y))$ であること。ここで、$M2, g_3 \vDash Dog(x)$ はポチ $\in$ F2(Dog)であるから、成立する。さて、$M2, g_3 \vDash \forall y(Human(y) \rightarrow Like(x,y))$ が成り立つための必要十分条件は、g_3 とy変種な関係にある割り当て関数 g_{31}, g_{32}, g_{33} に対して(ここで、 $g_{31}(x)= g_{32}(x)= g_{31}(x)$=ポチ、$g_{31}(y)$= 太郎、$g_{32}(y)$= 花子, $g_{33}(y)$=ポチ) **(ca), (cb), (cc)の<u>すべて</u>が成り立つこと**である:

(ca) $M2, g_{31} \vDash Human(y) \rightarrow Like(x,y)$
(cb) $M2, g_{32} \vDash Human(y) \rightarrow Like(x,y)$
(cc) $M2, g_{33} \vDash Human(y) \rightarrow Like(x,y)$
ここで、(ca)は、<ポチ, 太郎> $\in$ F2(Like) であるから成立。同様に(cb)も<ポチ, 花子> $\in$ F2(Like)であるから成立。(cc)はポチ$\notin$ F2(Human) であるから成立。
　以上により、(ca), (cb), (cc)すべてが成立したので、(c)は成立。
ゆえに、与式は M2 において真である。

(4) $\forall y\,(Human(y) \rightarrow \exists x\,(Dog(x) \wedge \mathrm{Like}(x,y)))$ の真理値を求めよ

解答例: モデル M2 で与式が真であるための必要十分条件は、定義域 D2 の要素数が 3 であることから、互いに___________の関係にある割り当て関数 g_1, g_2, g_3 に対して(ここで、 g_1 (　)=________、g_2 (　)=________、g_3 (　)=________ ） 次の**(a), (b), (c)の___________が成り立つこと**

(a) ____

(b) ____

(c) ____

(a)が成り立つための必要十分条件は、

M2, g_1 $\nvDash$ Human(y) ________、M2, g_1 $\vDash \exists x\,(Dog(x) \wedge \mathrm{Like}(x,y))$ である。ここで、_____________であるから、

M2, g_1 $\nvDash$ Human(y) は___________________。

また、M2, g_1 $\vDash \exists x\,(Dog(x) \wedge \mathrm{Like}(x,y))$ が成り立つための必要十分条件は、g_1と_______________な関係にある割り当て関数 g_{11}, g_{12}, g_{13} に対して (ここで、 g_{11} (y)= g_{12} (y)= g_{11} (y)=________、

g_{11} (x)= 太郎、g_{12} (x)= 花子, g_{13}(x)=ポチ)、次の (aa), (ab), (ac)の

が成り立つことである:

(aa) M2, g_{11} ⊨ ____________________________________

(ab) M2, g_{12} ⊨ ___________________________________

(ac) M2, g_{13} ⊨ ___________________________________

このうち、　　　　　　　　　　　　が成立するので、(a)は______________________________

その理由:

同様に、(b)については、

その理由:

また(c)については

その理由:

以上から ____