目次

数理論理学入門 (第 2 版)
付録つき

白井 英俊

中京大学情報理工学部

2010 年 4 月 1 日

第 1 章

論理学とは

重要語: 文、命題、構文論、意味論、曖昧さ、形式言語

論理学とは、我々が日常的に行なっている推論や議論の正しさ、さらにいえば何が「真」かを明らかにするための学問体系である。

論理学の歴史はギリシャのアリストテレスまで遡ることができる。アリストテレスは、文のいろいろなパタンを分類し、どのようなパタンの文が続いた場合にどのようなパタンの文が真となるかを議論している[*1]。このように歴史が長い学問であるが、基礎となる考えは近年になって変わってきている。

本稿で取り上げる論理学は、基礎を数学に置く数理的な論理学である。まず、議論や推論を成り立たせている「言葉」について集合論を背景として形式化を行い、それぞれの言葉に対し、真理値の観点から意味を与えて行く。そして真理値を保存する記号的な操作によって、推論や議論の正しさを保証する。

一般に言語には、どのような単語の並びが「文」を構成するか、という**構文論** (syntax) と、それぞれの単語が何を指すか、また文が表しているもの (命題) が真か偽か、ということを決定する**意味論** (semantics) とから構成される[*2]。論理学では、曖昧なところがないように、この構文論と意味論を厳密に定義した形式言語を用い、それによっていろいろな命題を表している。

ここで、我々が日常的に使っている言語 (これを「自然言語」という) がそのままの形では、論理学で使えない理由を簡単に述べておこう。上で述べたことからわかるように、それは、**自然言語のもつ曖昧さを排除するためである**。例えば「太郎は自転車で逃げる泥棒を追いかけた」という文を考えてみよう。これは、自転車に乗っているのが太郎か、それとも泥棒なのか、曖昧である。つまり、この文がどういう事態を表しているか、それだけでは判断できない。言い換えれば、この文が事実を述べたものなのか、事実に反することを述べたものなのか、つまりこの文の真理値を判定できないのである。

今の例は、意味の曖昧さが、文の構造、つまり構文構造の曖昧さ (二通り以上に解析できること) に起因するものであった。実際には、日常言語のもつ曖昧さは、構文構造の曖昧さだけではなく、単語の意味の曖昧さにもよる場合がある。例えば、一休トンチ話に出て来る「このハシ渡るな」の逸話は、まさに「ハシ」の意味の曖昧さを利用したものであ

[*1] 例えば、「どの犬も動物である」、「どの動物も背骨がある」から「どの犬も背骨がある」という文が導ける、というように、正しい推論パタンにはどのようなものがあるか、が議論されている。

[*2] 言語学では、構文論、意味論に加えて、言葉と社会的な環境や文脈との関係を扱う運用論なども考える。

ることは有名である。

しかし、論理学ではこういう曖昧さはあっては困るのである。論理学で扱う「文」は構文的な構造が唯一に決定できるものでなくてはならないし、また用いられる単語も意味に曖昧さがあってはならない。そうでなければ、議論の正しさを厳密に判定することができなくなるからである。

したがって、論理学では、曖昧さのない構文論をもち、そしてそれぞれの文に対して真理値を厳密に決定できる意味論をもつよう、形式言語を定義する必要があるのである。

本講義では、一階述語論理[*3] の理解を主たる目的とする。最初に、文を基本単位とする命題論理を紹介する。その理解を前提として、本講義の目的である一階述語論理の構文論と意味論を紹介し、最後に、計算機で推論を行なうための基本的理論である導出原理について述べる。

冗談の中の論理 1

「この病人を治しても殺しても、十分なお礼を差上げますから、全力をあげて治療してください...」。 こう言われてお医者さんが精一杯努力したが、あえなく病人は死んでしまった。それから 1 ヶ月たっても患者の家族から医者に約束のお礼が届けられない。そこで医者が患者の家族に謝礼を催促すると、

家族: あなたは病人を治しましたか？
医者: いえ、残念ながら...
家族: それでは、病人を殺したのですか？
医者: いえ、とんでもない。
家族: 私は『治しても殺しても』と言ったはずですが。

冗談の中の論理 2

教授は学生に講義の単位を出す必要はない。講義の内容が学生にとって価値があるものならそれだけで学生は満足するだろうし、くだらない講義なら学生はその講義を取るはずがない。

冗談の中の論理 3

「ねえ、ママ。パパの頭はどうして禿げているの？」
「いろんな難しいことを考えているからですよ。」
「ああ、そうなんだ。だから、ママの髪はいつもふさふさなんだね。」

高校までの数学に現れた証明

- 幾何: 三角形の内角の和が 180° であること、円周角の定理、三平方の定理、...
- 数学的帰納法: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- 背理法: $\sqrt{2}$ が有理数でないこと、素数が無限個あること、...

[*3] 文を基本単位と考える命題論理と、文を述語とその引数としての名詞句などに分解して考える一階述語論理が数理論理学の基本である。これら以外に、発展として、Lisp 言語のもとである λ 計算や、人工知能の知識表現研究や自然言語の意味論で用いられる様相論理などがある。

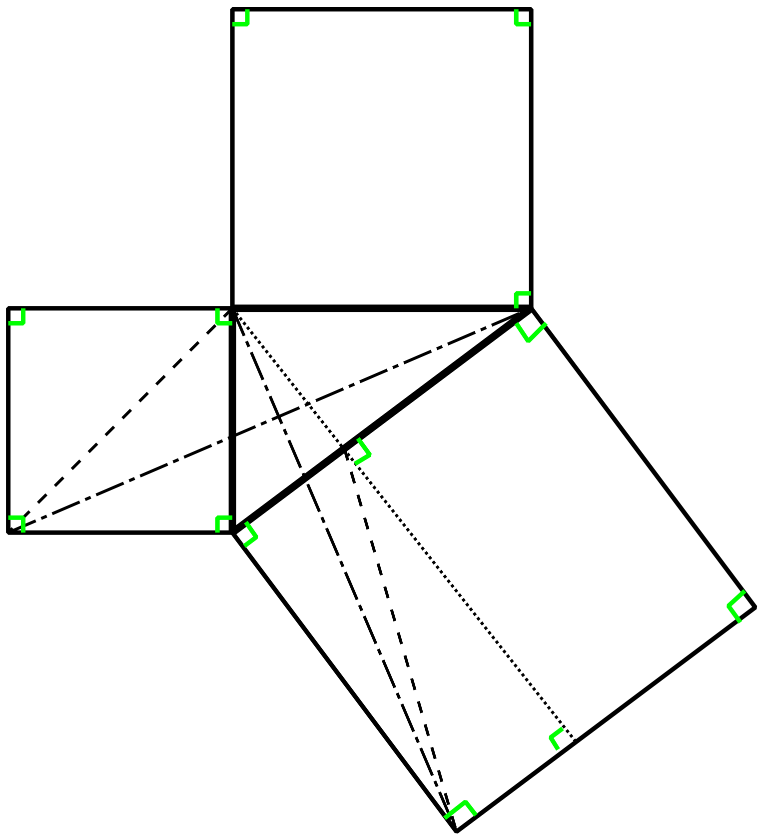

図 1.1　三平方の定理

第 2 章

命題論理

重要語: 命題、真、偽、真理値

命題論理とは、その内容が真か偽かを考えることができる**命題** (proposition) を基本単位とする論理学である。簡単にいえば、命題論理とは個々の命題の真理値から、それらの組合せによって作られる複合的な命題の真理値を考えたり、命題同士の関係を論じたりする学問である。

このように命題論理は命題が単位であるので、命題の内部構造も問題とする述語論理と比べれば、簡単で分かりやすい論理学であり、またブール代数や論理回路理論などとも関係が深い。

ここで、文と命題の関係について述べておこう。我々が日常的に使っている言葉では、文とは「句点で終る言葉の並び」である[*1]。一方、論理学では、推論や議論の正しさに関心があるので、「真か偽か」を常に問題にする。そのため、論理学で扱われる文は、日常の言葉でいえば「平叙文」である。しかも、常に「その文が意味する事態や事象」の真理値が問題にできるものでなければならない。すなわち、その文が表す命題が「真か偽か」が問えるようなものでなければならない。端的にいえば、文と命題と真理値の関係は、図 2.1 のように表される:

> 文は言葉の並び、命題はその文によって表される事態や事象で真か偽かが問えるもの、真理値はその命題が真か偽かという「値」である。

2.1　命題論理の構文論

重要語: 基本命題、複合命題、命題変項、論理式、整式、基本論理式、否定 ($\sim$)、連言 ($\wedge$)、選言 ($\vee$)、含意 ($\rightarrow$)、同値 ($\leftrightarrow$)

「雨が降っていて、道路が濡れている。」という文を考えよう。日本語を解するものなら誰でも、この文は「雨が降っている」という事象と「道路が濡れている」という事象を記述していると認めるであろう[*2]。したがって、今雨が降っていて、そして道路が濡れていれば、この文が表していることは真実である、すなわち今の状況において「真なる命題」

[*1] 日常的には文と文章は同じ意味として用いられるが、言語学では文とは基本的に一つの事態を表す言語形式であり、複数の文が意味的に結びついた集まりである文章とは区別される。
[*2] 厳密にいえば、その二つの事象の因果関係も読みとれるが、ここでは問題にしない。

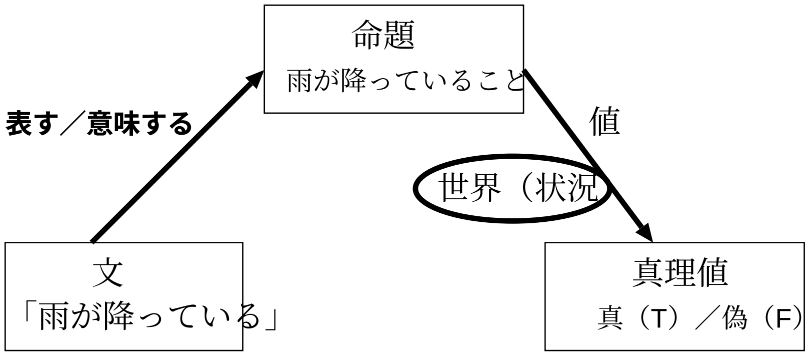

図 2.1　命題論理における文、命題、真理値の関係

をこの文は表していると考えられる。また、同時にこの文は「雨が降っている」という文と「道路が濡れている」という文から構成されており、これらの文もまた「真なる命題」を表していると考えられる。すなわち、「雨が降っている」と「道路が濡れている」はそれぞれ、真か偽かが問える命題を表しており、それらから構成されている「雨が降っていて、道路が濡れている」という文も真か偽かが問える命題を表していると考えられる。この例で示されるように、命題には、より小さな命題から構成される複合的な命題もある。このような命題を**複合命題**と呼んでおこう。

では、複合命題をより小さな命題に分解できたように、「雨が降っている」や「道路が濡れている」 もさらに小さな命題に分解できるであろうか？つまり、これらの文をさらに、命題を表す、より小さな文に分解することができるであろうか？

もしも「雨が降っている」を分解しようとすると、「雨が」や「降っている」に分解しなければならなくなる。しかし、これらはもはや真か偽かを問えるものではない。「雨が」に対しては「どうした」を考えなければ命題にならないし、同様に「降っている」も「何が」を考えなければ命題にならない。したがって、「雨が降っている」という文は、これ以上分解できない最小の命題であることが分かる。

このような最小の命題を**基本命題** (もしくは**素命題**) と呼ぶ。今みたように「雨が降っている」と「道路が濡れている」は両方とも基本命題の例である。そして、「雨が」も「雨が降っていて、道路が濡れている」も基本命題ではない。「雨が」の方は、そもそも真か偽かが問えないのであるから命題ですらない。一方、「雨が降っていて、道路が濡れている」は複合命題である。

基本命題を表すには、慣習的に $p, q, r, \ldots$ というアルファベットが用いられる。これら $p, q, r, \ldots$ は文に相当するもので、命題論理の「専門用語」では、**命題変項**、もしくは文変項、命題変数などと呼ばれる[*3]。

ここで p, q, r などを文と呼ばずに命題変項と呼ぶ理由は、p や q が固定的に「雨が降っている」や「道路が濡れている」を意味するのではなく、p は仮に「雨が降っている」を表すものとしよう、とか、q は「道路が濡れている」を表すものとしよう、というように使うからである。これは代数学における変数 x や y の使い方と本質的に同じである。従って「変数」とか「変項」と呼ばれるのである。

[*3] 大事な点なので、繰り返し注意しておこう。ここで「命題」と呼んでいるのは、$p, q, r, \ldots$ が表している内容である。$p, q, r, \ldots$ は、それらを表す「文」にあたる記号である。

この命題変項を基本として、複合命題など命題一般を表すものを定義する。これは**論理式** (logical form)、もしくは整式 (wff, well formed formula) と呼ばれている。

定義 2.1 (命題論理における) **論理式**の定義

1. **命題変項**は論理式である。命題変項を**基本論理式**もしくは**原子論理式**と呼ぶこともある。
2. 論理式の前に $\sim$ をつけたものも論理式である。
3. 任意の二つの論理式を $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ のいずれかの論理結合記号で結合したものも論理式である。
4. 以上のものだけが、論理式である。

この定義に現れた $\sim$ は**否定** (negation) を表す結合記号であり、$\neg$ と表すこともある。また、$\wedge$ は **連言** (conjunction) の結合記号、$\vee$ は**選言** (disjunction) の結合記号、$\to$ は**含意** (implication) の結合記号、$\leftrightarrow$ は**同値** (equivalence) の結合記号といい、それぞれ &、|、$\supset$、$\equiv$ と表すこともある。

日常言語でいえば、否定は「〜(で) ない」、連言は「かつ、そして」、選言は「または、もしくは」、含意は「ならば」にほぼ対応する。したがって p を「雨が降っている」、q を「道路が濡れている」をそれぞれ表すとすると、

- $\sim p$ (もしくは $\neg p$) は「雨が降っていることはない」、すなわち「雨が降っていない」という命題を、
- $p \wedge q$ (もしくは $p \& q$) は「雨が降っている、かつ道路が濡れている」という命題を、
- $p \vee q$ (もしくは $p\ |q$) は「雨が降っている、または道路が濡れている」という命題を、
- $p \to q$ (もしくは $p \supset q$) は「雨が降っているならば、道路が濡れている」という命題を、
- $p \leftrightarrow q$ (もしくは $p \equiv q$) は「雨が降っているならば道路が濡れている、かつ道路が濡れているならば雨が降っている」という命題を、

をそれぞれ表す。

定義 2.1 によって、p や q という基本論理式から、$\sim p$ や $p \wedge q$ や $q \to r$ のような論理式が作られる。それだけではなく、さらに再帰的にこれを適用して、$\sim p \wedge q$ や $p \wedge q \to r$ のような複雑な論理式も作られるのである。

ところで、ここには問題がないことはない。例えば $p \wedge q \to r$ という論理式を考えてみると、これは $p \wedge q$ と r とを $\to$ によって結合したものか、p と $q \to r$ とを $\wedge$ によって結合したものかがわかりにくい。これを「論理式の構文論的曖昧さ」という。ここで「構文論」とは、この論理式が命題変項と論理結合記号によってどのように組み立てられているかを意味する[*4]。この「曖昧さ」は問題である。分かりにくいばかりではなく、どういう組み合わせを考えるかによって真理値が異なってしまい、曖昧さを排除するために形式言語を考えたことが無駄になる。

[*4] 論理式がどのように組み立てられているかということは「論理式の構造」という言葉で呼ばれる。ちなみにこの**構造** (structure) という用語は科学一般においてとても重要である。

そこで、どれとどれが結合されているかを明示するために括弧 ( ), [ ], { }, が用いられる。

定義 2.2　補助記号 (括弧)

> ( )、 [ ]、 { }, は括弧である。ただし、(、 [、 {は特に「開き括弧」と呼ばれ、それぞれ対応する「閉じ括弧」)、]、} が存在する。そして、開き括弧を書く場合は必ず対応する閉じ括弧を書かなければならない。逆に閉じ括弧には必ず対応する開き括弧がなければならない。

括弧を使えば、曖昧だった論理式 $p \wedge q \to r$ は、

- $(p \wedge q) \to r$
- $p \wedge (q \to r)$

のように曖昧さなしで表現される。

このように括弧を使えば曖昧さなく論理式を表すことが可能である。もっとも、括弧ばかりになって、次の式のように見にくくなることもある:

$$(((((p \wedge q) \wedge r) \wedge s) \wedge t) \wedge u) \vee v$$

同じことは数学一般において起こることである。そこで、代数においては、演算子に結合の強さの順序を決めてある。これにより、$-x+y\times z = u$ という数式は $((-x)+(y\times z)) = u$ と解釈されるようになっている。

そこで、論理学においても、論理結合記号に対して結合の強さの順序を決めておけば、括弧なしでも 、ある程度、曖昧さなく構造が決定できる。この考え方から決められた論理結合記号の「結合の強さ」の表が下である。

結合の強さ	論理結合記号	(参考) 算術演算子
最も強い	$\sim$ (否定)	$-$ (負の符合)
強い	$\wedge, \vee$ (連言、選言)	$\times, \div$ (乗算、除算)
弱い	$\to$ (含意)	$+, -$ (加算、減算)
最も弱い	$\leftrightarrow$ (同値)	$=$ (等号)

演習 2.1　次の論理式はどのように曖昧であろうか。論理結合記号の「結合の強さ」を仮定した場合に何通りの解釈の可能性があるかを答えよ。また、一通りの解釈しかない場合は、結合の強さを考えないとしたら、その解釈は括弧を使ってどのように表記されるかを答えよ。複数の解釈がある場合には、それぞれの可能性に対し、適切に括弧を書き加えてすべての可能性を書き下せ。

1. $p\vee \sim q \wedge r$
2. $\sim p\wedge \sim q \to r$
3. $p \vee q \wedge r \to s \vee t$
4. $\sim\sim p \to q$
5. $p \to\sim q \to\sim r$

演習 2.2　以下の文を対応する命題論理式に翻訳せよ。ただし、p は「太郎は花子を好きだ」、q は「花子は太郎を好きだ」、r は「花子は次郎を好きだ」、s は「太郎は次郎を嫌っている」をそれぞれ表す命題変項とする。

1. 太郎が花子を好きならば、花子は太郎を好きだ。
2. 太郎は花子を好きだが、花子は次郎を好きだ。
3. 太郎は花子を好きではない。
4. 太郎は花子を好きか、もしくは好きではない。
5. 太郎は花子を好きで花子は次郎を好きならば、太郎は次郎を嫌っている。

演習 2.3　以下の文を命題論理の論理式で表せ。ただし、P,Q,R,S,U は以下に示すような命題を表す命題変項とする。

P: 太郎は医者が必要だ　　Q: 太郎は弁護士が必要だ
R: 太郎は事故にあった　　S: 太郎は病気だ
U: 太郎は怪我をしている

1. 太郎は事故にあったなら太郎は弁護士が必要であり、太郎が病気なら太郎は医者が必要だ。
2. 太郎が医者も弁護士も必要ならば、太郎は事故にあったのだ。
3. 太郎は病気でもなく怪我もしていないのなら、太郎には医者は必要ない。

演習 2.4　P、Q、R、S、U は演習 2.3 と同じとする。以下の命題論理式を日本語で言い替えよ。

1. $\mathrm{P} \to (\mathrm{S} \vee \mathrm{U})$
2. $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \leftrightarrow (\mathrm{R} \wedge \mathrm{U})$
3. $\mathrm{R} \to (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$

2.2　意味論

重要語: 真 (T)、偽 (F)、真理値、真理値表、同値な論理式

論理学における意味論とは、構文論によって規定された論理式と、その論理式の真理値との関係を規定するものである。

そのために、本節では個々の命題の真理値と、その命題から構成される複合命題の真理値の関係を規定する。もっとも日常の世界では、「雨が降っている」といっても真か偽かが決まらない場合がありうる。いつ、どの地方の天気について述べているかが分からない場合である。これを論理学では「世界」や「状況」という言葉で呼んでいる。天気の命題では、「どこの地方のいつの時点か」が「世界」となる。世界が命題の真理値を決定するのである。しかし視点を変えれば、命題の真理値によって世界が決定されるとも考えられる (例えば、どの地方の天気について述べているのか、その範囲が絞れる)。これに対し、「雨が降っている」という命題が天気の観測ができない地方についてのものである場合は問題である。命題の真偽が判定できないからである。ここで論理学では、**真か偽かが決定できないものは命題ではない**とする。常に命題は真か偽かのどちらかの真理値を持つもの

である。従って、真か偽かのどちらか分からないとか、真でもあり偽でもある、ということは対象外であることに注意しよう[*5]。

そして命題は論理式によって表される。そこで、ある命題がある世界において真の場合、その命題を表す「論理式がその世界で**真** (T, true) という値を持つ」と言い、またその命題がある世界で偽の場合、その命題を表す「論理式がその世界で**偽** (F, false) を値として持つ」と言う方が便利である[*6]。従って、これからは「ある世界における論理式の真理値」を問題にすることがある。ただし、これはみな「その論理式が表している命題のその世界での真理値」が問題になっていると考えて欲しい。また、「ある世界である論理式が真か偽かの**真理値**を割り当てられている」と言うことがあるが、これも同様に「その世界でその論理式が表す命題の真理値が決められている」ということを意味していると考えて欲しい。

基本命題の真理値は「世界」によって決まる。それでは複合命題の真理値はどのようにして決まるだろうか？それは、複合命題を構成する基本命題の真理値と、以下で定義される論理結合記号の意味、そして複合命題の構文論 (複合命題の構造) によってである。

定義 2.3　論理結合記号の意味

1. 否定 (negation): $\sim$
   (どの世界においても) どの論理式 p に対しても、p が真 (T) であれば $\sim p$ は偽 (F) であり、p が偽 (F) であれば $\sim p$ は真 (T) である。
2. 連言 (conjunction): $\wedge$
   (どの世界においても) どの二つの論理式 p, q に対しても、p と q が共に真 (T) であれば、またその時に限り $p \wedge q$ は真 (T) である。言い換えれば、p と q のどちらか少なくとも一つが偽 (F) ならば、またその時に限り $p \wedge q$ は偽 (F) である。
3. 選言 (disjunction): $\vee$
   (どの世界においても) どの二つの論理式 p, q に対しても、p か q の少なくとも一つが真 (T) であれば、またその時に限り $p \vee q$ は真 (T) である。言い換えれば、p と q の両方が偽 (F) ならば、またその時に限り $p \vee q$ は偽 (F) である。
4. 含意 (implication): $\rightarrow$
   (どの世界においても) どの二つの論理式 p, q に対しても、p が偽 (F) か、もしくは q が真 (T) であれば、またその時に限り $p \rightarrow q$ は真 (T) である。言い換えれば、p が真 (T) であり、かつ q が偽 (F) であるならば、またその時に限り $p \rightarrow q$ は偽 (F) である[*7]。

[*5] もしもある命題が真と偽の両方の値を持つような状況を考えたとすれば、それは「矛盾」した状況と呼ばれる。日常生活で言えば、矛盾したことを言う人と議論しても無駄、ということである。

[*6] 真を 1 で、偽を 0 で表すこともある。

[*7] 含意記号は「ならば」と読まれるが、日本語の「ならば」とは「意味」が違うことに注意すること。日本語の「p ならば q」は、p という条件が成り立っていれば q が成立する (例えば『「ボールを投げる」ならば「ボールは飛んでいく」』) という、因果的もしくは慣習的な関係を表すことが多い。一方、論理学において $p \rightarrow q$ は、上で定義された以上の意味を持たない。つまり、たまたま考えている世界で p が偽 (F) であるか q が真 (T) であれば $p \rightarrow q$ は真 (T) であり、そうでなければ、つまり p が真 (T) でありかつ q が偽 (F) であれば偽 (F)、というものである。

この捉え方を弁護する例をあげよう。あるクラスでは男の子はそうではないが、女の子は (たまたま) 全員、マイカーを持っているとする。すると、「ある人が女の子**ならば**、その人は車を持っている」は真なる命題である。また「ある人が男の子**ならば**、その人は車を持っている」は偽の命題と考えられる。ここである人が「女の子」であるか「男の子であるか」ということと「車を持っている」ことの慣習的・因果

5. 同値 (equivalence): $\leftrightarrow$
   (どの世界においても) どの二つの論理式 p, q に対しても、p と q の真理値が一致すれば、またその時に限り $p \leftrightarrow q$ は真 (T) である。言い換えれば、p と q の真理値が異なれば、またその時に限り $p \leftrightarrow q$ は偽 (F) である。

論理学は議論の正しさを形式化して示すことを目的に出発した学問であったが、実際には上の定義で見られるように、日常言語で用いられている接続詞と、論理学の結合記号の意味が乖離しているところが (少しは) ある、という問題を抱えている。論理学を学ぶ我々としては、論理学では日常言語の意味論とは独立な、論理学独自の意味論が構築されており、その考え方を学習している、と考えた方がよいであろう。

次に真理値表を紹介する。命題論理において、論理式の真理値を考えることにおいて重要なものである。

定義 2.4 真理値表 (truth table)
論理式の真理値は真 (T) か偽 (F) のどちらかであることに注意して、論理式に現れる基本論理式の真理値のあらゆる組合せに対して、その論理式がどのような真理値をとるかを表にしたものを真理値表という。

命題 (従って論理式) の真理値は、それがどの「世界」(状況) について述べられたか、によって異なる。たとえば、「今日は雨である」の真理値は、それが述べられたのが晴れた日か雨の日かによって異なる。ゆえに、ある論理式の真理値を求めることは、原則的に状況を考えなければ不可能である。一方、個々の論理式の真理値は真か偽かのどちらかであるから、その論理式を構成する基本論理式が取りうる真理値すべての可能性を書き下すことで、元の論理式がどのような真理値を取るかを調べてみることは可能である。真理値表はこれを体系的に行なうための方法である。

例 2.1 にあげる表は $\sim p$、 $p \wedge q$、$p \vee q$、$p \to q$、$p \leftrightarrow q$ に対する真理値表の例である。これらはみな p と q という基本命題から構成された複合命題である。

この表の作り方は、まず表の左に、基本命題 p と q を書き、その下の欄に、これらが取りうるすべての真理値の組み合わせを上から下に書き下している。

ここで、順序だててすべての組合せを書き下す表すことが重要である。F を 0、T を 1 と考えれば、この表が上から下に 11、10、 01、00 と、数の大きいものから小さいものに並べられていることに気が付くであろう。本講義では、このよう順番に書き下すこととする。

また、基本命題のそれぞれの真理値の組み合わせに対して、複合命題がどのような値を取るかを、右の方に書く。

例 2.1 真理値表の例

的な関係はなく、たまたま考えている世界では「女の子」の場合に「車を持っている」ことが成り立つだけである。数学的には、今考えている世界で**「女の子 (もしくは男の子) の集合」が「マイカーを持っている人の集合」の部分集合である**という関係が成り立つ (かどうか) を含意記号で表す、と見なせる。ここで、実際には「女の子がいない」場合はどうだろうか？これが $p \to q$ において p が偽の場合である。集合論では、**空集合はどんな集合に対してもその部分集合**である。これにより、p が偽の場合に $p \to q$ が真であることが正当化される。(別な見方をすれば、$p \to q$ の「反例」(p が真であっても q が偽であるケース) がない限り、$p \to q$ は真)

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

今の場合は単純な式であったが、もっと複雑な式の場合は少し様子が異なる。

たとえば $(p \to q) \wedge (q \to p)$ という論理式の真理値表を考えてみよう。このような複雑な式の場合、その式の値の可能性をすべていっぺんに書き下すことは難しい。したがって、まず考えなければならないのは、

1. 対象となる論理式を構成する基本論理式をすべて集めておく (集合として表す)
2. 論理式の構造を明らかにする。つまり、論理式がどのような論理結合記号によって組み合わされているかを分解する。そしてその組合わせを書き下す。

ということである。ただし、2 番目については、「論理結合記号」に注目し、それがどのような論理式を結びつけているかを調べれば、論理式の構造が得られることに注意しよう (この方法はすぐ後で実践する)。

例として、先の $(p \to q) \wedge (q \to p)$ を考える。上であげた考えに従えば、

1. 式を構成する基本命題論理式: $\{p, q\}$
2. 論理結合記号に注目して式を分解する (原則: 命題変項同士を結合しているものを先にする):
   (1) $p \to q$ 　$\cdots$ これを α とする
   (2) $q \to p$ 　$\cdots$ これを β とする
   (3) $\alpha \wedge \beta$ 　$\cdots$ これが元の論理式の全体像

これに従って、真理値表を以下のように書く。

例 2.2　$(p \to q) \wedge (q \to p)$ の真理値表

p	q	$p \to q\ (= \alpha)$	$q \to p\ (= \beta)$	$\alpha \wedge \beta$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

まとめ: 真理値表の求め方

1. 式を構成する基本論理式を集める (集合として表す)
2. それらを表の左側に並べ、それらの真理値の組合せをすべて書く。この時、T を 1、F を 0 とみなして、表の上に数の大きいものが来て、順に小さいものになるように注意する。
3. 式を構成する部分式を表の右側に並べる。論理結合記号ごとに一つの部分式が考えられる。
4. それぞれの部分式の真理値を書き下す。この時、部分式に含まれる (基本) 論理式

が何であるかに十分注意する。また、論理結合記号の「意味」にも注意する。

演習 2.5 以下の式に対して、真理値表を作れ。

1. $(p \to (\sim q \vee r))$
2. $((p \wedge q) \to p)$
3. $\sim (p \wedge (q \vee \sim p))$
4. $(p \to (q \vee \sim r)) \leftrightarrow ((\sim q \wedge r) \to \sim p)$
5. $(p \to (q \wedge (r \to p)))$
6. $((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$

例 2.2 の表の最後の列と、例 2.1 にあげた $p \leftrightarrow q$ の真理値表とを比べて見よう。これらは一致している。このことは、この二つの式が等しい、つまり同値であることを意味する。このように、真理値表を使えば、二つの式が同値であることを示すことができる。

定義 2.5 論理式 α と β が**同値**であるとは、あらゆる「世界」においてその二つの論理式の真理値が同じであることである。

論理式の真理値を論じる時、同値な論理式は、たとえその論理式が表す命題の内容が異なっていても、区別をする必要がない。このことは奇妙に思われるかも知れないが、論理学では命題内容よりも真理値が問題なのである。その真理値によって命題は区別される。従って、二つの論理式 α と β とが同値であれば、α の代わりに β を用いることが可能である。

例 2.3 同値な論理式の例 (以下で T は真、F は偽を真理値としてとる論理式を表すものとする) をあげる。これらはみな重要な式である。

巾等律	$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$	$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$
結合律	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
分配律	$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
二重否定	$\sim\sim \alpha = \alpha$	$\sim\sim\sim \alpha = \sim \alpha$
ド・モルガン	$\sim (\alpha \vee \beta) = \sim \alpha \wedge \sim \beta$	$\sim (\alpha \wedge \beta) = \sim \alpha \vee \sim \beta$
対偶		$p \to q = \sim q \to \sim p$
	$p \to q = \sim p \vee q$	
	$\alpha \vee T = T$	$\alpha \wedge T = \alpha$
	$\alpha \vee F = \alpha$	$\alpha \wedge F = F$
	$\alpha \vee \sim \alpha = T$	$\alpha \wedge \sim \alpha = F$

演習 2.6 真理値表を用いて、分配律が成り立つこと、またド・モルガン則が成り立つことを示せ。

演習 2.7 以下の論理式と同値な論理式を最低 3 個あげよ。

1. P
2. $\sim P$
3. $P \to Q$

4. $(P \wedge Q) \vee R$
5. $(P \vee Q) \wedge R$

2.3　解釈とモデル

重要語: モデル、解釈、恒真式、トートロジー、妥当式、
矛盾式、充足不能式、恒偽式、充足可能式

例として「雨が降っている」という命題を考えよう。この命題は、いつ、どこの天気について述べたものかが分かれば、それが真か偽かが分かるものである。このように、命題の真理値は、一般には「どの状況について述べたものであるか」によって真か偽かが決まる。言い替えれば、命題論理における「世界」(状況とか文脈ということもある) とは、どのような命題が成り立っているか、によって特徴づけられるものである。これを (数学的に) 定式化したものを論理学では**モデル** (model) と呼ぶ。そして、命題はモデルに依存して真か偽かという真理値が決定される。数学的には、命題論理のモデルは、真である基本命題の集合で表される。(ここで問題。なぜ偽である基本命題は考えなくてよいのだろうか？)

なお、「ある命題が真である」とか「ある命題が偽である」と言うことがあるが、これはみな、モデルが与えられているいう仮定のもとで (つまり、命題がどの世界について述べたものであるかが分かったとして) 議論していることに注意して欲しい。

定義 2.6　論理式の解釈 (Interpretation of Logical Form)
論理式の解釈とは、論理式の真理値を求めることである。つまり、命題論理では、モデルによって与えられる基本論理式の真理値を用いて、与えられた論理式の真理値を決定することである。

上の定義からわかるように、命題論理においては、あるモデルにおける論理式の解釈とは、その論理式に対する真理値表を書いてみるとその一部でしかない。なぜなら、真理値表とはあらゆるモデルを想定して、それぞれのモデルにおける論理式の解釈を行なっていることなのだからである[*8]。

面白いことに、論理式によっては、どのようなモデルを持って来ても、モデルによらず、ある決まった真理値を持つものがある。例えば $p \wedge \sim p$ や $p \vee \sim p$ がそれである。このように、モデルによって真理値が決まるものとか、モデルによらず固有の真理値を持つものという点から、論理式を分類することができる。充足可能式、恒真式、恒偽式はそのような論理式の分類の名称である。

定義 2.7　**恒真式** (tautology)
どのような解釈によっても、つまり、論理式に含まれる命題変項の真理値をどのように変えても、その論理式が真となる時、その論理式を恒真式、もしくは**妥当式** (valid formula) という。

[*8] 真理値表は命題論理だけの方法である。一階述語論理ではすべてのモデルを想定して真理値表をつくってみる、という方法は使えない。

注意:「どのような解釈によっても」は、「どのようなモデルに基づく解釈によっても」と同じ意味。

定義 2.8　**矛盾式** (inconsistent formula)
どのような解釈によっても、つまり、論理式に含まれる命題変項の真理値をどのように変えても、その論理式が偽となる時、その論理式を矛盾式、もしくは**充足不能式** (unsatisfiable formula)、もしくは**恒偽式**という。

定義 2.9　**充足可能式** (satisfiable formula)
ある論理式が矛盾式でなければ、その論理式は、ある解釈によって、つまり命題変項にうまく真理値を割り当てることによって、その論理式は真となるはずである。そのような論理式は充足可能式という。

なお、恒真式も充足可能式に含まれる (問題: なぜか？)。

ここで、恒真式と矛盾式の例をいくつかあげておく。

例 2.4　恒真式と矛盾式の例

恒真式

$p \vee \sim p$

$p \to (q \to p)$

$(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$

矛盾式: 恒真式の否定は矛盾式になる

$p \wedge \sim p$

$\sim (p \to (q \to p))$

$\sim ((p \to q) \to (\sim q \to \sim p))$

演習 2.8　以下の論理式は恒真か、充足不能か、充足可能かを真理値表で判定せよ。

1. $\sim (\sim P) \to P$
2. $(P \vee Q) \to P$
3. $(P \to Q) \to (\sim Q \to \sim P)$
4. $(P \wedge (Q \to P)) \to P$
5. $\sim P \wedge (\sim (P \to Q))$

2.4　命題論理における論理式の標準形

重要語: 連言標準形、リテラル、節、連言標準形のアルゴリズム、分配則

命題論理のどんな論理式に対しても、それと同値で、かつある一定の形をとる論理式が存在する。この形式を標準形といい、命題論理では、**連言標準形** (conjunctive normal form, CNF) と**選言標準形** (disjunctive normal form, DNF) とがよく用いられる。

ここでは連言標準形について説明する。後述する 一階述語論理においても同じような概念が用いられる重要な形式である。

連言標準形は形の上からは次のように見える。

$$\underbrace{(\text{リテラル} \vee \text{リテラル} \vee \ldots)}_{\text{節}} \wedge \boxed{\quad\text{節}\quad} \wedge \boxed{\quad\text{節}\quad} \wedge \ldots$$

図 2.2　命題論理における連言標準形

ここで、連言標準形の定義で用いられるリテラルと節の定義を以下にあげる:

定義 2.10　用語の定義

リテラル (literal)
基本論理式、もしくはそれに一個だけ否定記号がついた式。
例えば、p、$\sim q$ はリテラルである。ちなみに、$p \vee q$ や $\sim\sim p$ はリテラルではない。

節 (clause)
一つのリテラル。または複数のリテラルが選言論理結合子 ($\vee$) によって結合された論理式。l_i をリテラルとすると、節は $l_1 \vee l_2 \vee \ldots \vee l_n$ という形の論理式である。
例えば、p、$\sim q$、$p \vee q$、$(\sim p) \vee q$、$(\sim p) \vee (\sim q) \vee (\sim r)$ は節である。しかし、$p \wedge q$ や $\sim (p \vee q)$ は節ではない。

連言標準形
一つの節。または複数の節が連言論理結合子 ($\wedge$) でのみによって結合された論理式。C_j を節とすると、連言標準形は $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ という形の論理式である。また、l_{ij} をリテラルとすると、$(l_{11} \vee \ldots \vee l_{1k}) \wedge \ldots \wedge (l_{m1} \vee \ldots \vee l_{mn})$ という形の論理式である。
例えば、p、$\sim q$、$p \vee q$、$p \wedge q$、$(p \vee q) \wedge r$、$(\sim p \vee q) \wedge (\sim r)$ は連言標準形である。しかし、$(p \wedge q) \vee r$ はそうではない。

以上でどういう形の論理式を連言標準形と呼ぶかはわかったことと思う。次のアルゴリズムは、与えられた論理式から、それと同値な連言標準形の論理式を導く方法を与えるものである。

定義 2.11　**連言標準形を求めるアルゴリズム**

以下のステップを順に実行することによって、いかなる論理式に対しても、それと同値な連言標準形の論理式を求めることができる。ただし、いくつかのステップは不要な場合があるので、論理式の形を見て判断する必要がある。

1. 同値の論理結合子 ($\leftrightarrow$) や含意の論理結合子 ($\rightarrow$) を含む論理式を同値な論理式で置換する。以下の同値式が用いられる:
   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha) \quad \Rightarrow (\sim \alpha \vee \beta) \wedge (\sim \beta \vee \alpha)$
   $\alpha \rightarrow \beta \equiv \sim \alpha \vee \beta$
2. 論理式が否定記号 ($\sim$) を含む場合、基本論理式の直前にだけ現れるような論理式に変換する。以下の同値式が用いられる:

二重否定:　$\sim\sim \alpha \equiv \alpha$

ド・モルガン則:　$\sim(\alpha \vee \beta) \equiv \sim\alpha \wedge \sim\beta$

$\sim(\alpha \wedge \beta) \equiv \sim\alpha \vee \sim\beta$

3. 必要ならば次の分配則を用いて、連言標準形の論理式に変換する。

$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

ここで、左の論理式と比べ、右の論理式は連言標準形になっている (もしくは、連言標準形に近い) ことに注意。

このアルゴリズムを用いて、実際にある論理式に対する連言標準形を求める方法を示そう。

例 2.5　$(\sim(p \to q)) \vee r$ の連言標準形を求める。

1. $\to$ を含む式の変形
   $(\sim(\sim p \vee q)) \vee r$
2. 否定記号を内側に
   $((\sim\sim p) \wedge (\sim q)) \vee r$
   $(p \wedge (\sim q)) \vee r$
3. 分配則を用いて連言形に
   $(p \vee r) \wedge ((\sim q) \vee r)$

参考: 分配則は一見分かりにくそうに見えるかも知れないが、以下の算術式との対応関係をつかんでおくと、やりやすいであろう。

$$
\begin{aligned}
&p * (q + r) = p * q + p * r && p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\
&(q + r) * p = q * p + r * p && (q \wedge r) \vee p = (q \vee p) \wedge (r \vee p) \\
&u * v * (q + r) = u * v * q + u * v * r && (u \vee v) \vee (q \wedge r) = (u \vee v \vee q) \wedge (u \vee v \vee r) \\
&(u + v) * (q + r) = u * q + u * r + v * q + v * r && \\
&&& (u \wedge v) \vee (q \wedge r) = (u \vee q) \wedge (u \vee r) \wedge (v \vee q) \wedge (v \vee r)
\end{aligned}
$$

参考: 命題論理において、次の事実は重要である。

どの論理式に対しても、同値な連言標準形の論理式が存在する。

参考: 選言標準形の論理式とは、連言標準形に対して連言記号と選言記号とを入れ替えた形の論理式である。また、任意の論理式に対し、同値な選言標準形を求めるアルゴリズムも存在し、定義 2.11 とほぼ同様である。ただし、3 番目のステップでは以下の分配則を用いる:

$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

$$\underbrace{(\text{リテラル} \wedge \text{リテラル} \wedge \ldots)}_{\text{選言形の節}} \vee \boxed{\text{選言形の節}} \vee \boxed{\text{選言形の節}} \vee \ldots$$

図 2.3　命題論理における選言標準形

演習 2.9　以下の式を連言標準形に直せ。

1. $\sim (p \to q) \vee r$
2. $p \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$
3. $(\sim p \wedge q) \vee \sim (p \to (q \wedge r))$
4. $((p \to q) \vee (p \wedge q)) \to r$
5. $(((p \vee q) \wedge (r \wedge s)) \to (p \wedge q))$

2.5　命題論理の公理系

重要語: 公理、Russell、Whitehead、モーダスポネンス、推論規則、定理式、公理系、形式的証明、定理、演繹、演繹定理、演繹可能 ($\vdash$)

「どのモデルにおいても真である」論理式を**定理式** (theorem) という。命題論理においては、ある論理式が定理式であることを示すのに、前述した「真理値表」によってあらゆる可能なモデルを調べあげて示す方法以外に、本節で述べる公理系に基づく「証明」による方法がある。ここで**公理系**とは、**公理** (axiom) と呼ばれる数個の論理式 (のパターン) と、**推論規則** (inference) と呼ばれる数個の規則によって、定理式を導く (「証明する」) 方法のことである。命題論理にはいくつかの公理系があることが知られている。以下に述べる公理系は Russell と Whitehead によるものである。また、この公理系による証明と、真理値表による証明は、等価であることが証明されている。

定義 2.12　Russell と Whitehead による公理系

A1　$P \to (Q \to P)$
A2　$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$
A3　$(\sim P \to \sim Q) \to ((\sim P \to Q) \to P)$
B1　(modus ponens, モーダス・ポネンス) P と $P \to Q$ から Q を得る。

注意。A1 から A3 は**公理**、B1 は**推論規則**と呼ばれる。また上の P、Q、R は任意の論理式を当てはめてよいものである。

次に、どのようなものが「証明」として認められるかを定義する。

定義 2.13　形式的証明—公理系に基づく「証明」の形を規定

論理式の有限列 $A_1, \ldots, A_n$ があり、$k = 1, 2, \ldots, n$ のそれぞれについて

1. A_1 は公理
2. $1 < k \leq n$ なる A_k は
   (a)　公理、もしくは
   (b)　$i, j < k$ なら A_i と A_j から推論規則 **B1** によって直接導かれたもの、

であれば、A_n は**形式的証明可能**、あるいは (形式的) **定理**という。また、列 $A_1, \ldots, A_n$ を A_n の**形式的証明**という。そして、この有限列の長さ n を**形式的証明の長さ**という。

この定義からわかるように、公理系による証明とは、論理式の列であり、それぞれの論理式は公理か、公理から推論規則によって導かれたものに限られることがわかる。

今度は、何らかの前提となる論理式が仮定されている場合に、その論理式からどのような論理式が導かれるかを規定しよう。これは**演繹** (deduction) と呼ばれている。

定義 2.14　演繹可能
演繹可能は証明と似ているが、「仮定」となる論理式がある場合に、どのようにして結論を導くかを規定する。

論理式の有限列 $A_1, \ldots, A_n$ に対し、$k = 1, 2, \ldots, n$ のそれぞれについて

1. A_1 は公理、または Γ の論理式
2. $1 < k \leq n$ なる A_k は
   (a)　公理、もしくは Γ の論理式
   (b)　$i, j < k$ なら A_i と A_j から推論規則 **B1** によって直接導かれたもの、

という場合、A_n は Γ **から演繹可能**という。そして、$\Gamma \vdash A_n$ と書く。

図 2.4 に、$A \to A$ の証明を示す。真理値表を使えば簡単に示せる定理でも、結構難しいことがわかるであろう。

(1)	公理 A1 より (P には A, Q には $(A \to A)$ を代入)
	$A \to ((A \to A) \to A)$
(2)	公理 A2 より (P には A, Q には $(A \to A)$, R には A を代入)
	$(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$
(3)	(1),(2) と推論規則 B1 より
	$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$
(4)	公理 A1 より
	$A \to (A \to A)$
(5)	(3),(4) と推論規則 B1 より
	$A \to A$　　q.e.d.

図 2.4　命題論理の公理系による証明の例

公理系による証明では、次に述べる演繹定理という定理が重要である。これなしでは、公理系による証明は困難である。

定義 2.15　演繹定理

A, B を論理式とし、Γ を任意の論理式の有限列とする。もしも

$$\Gamma, A \vdash B$$

ならば

$$\Gamma \vdash A \to B$$

が成り立つ。

この定理が成り立つことの証明はそれほど難しくないので各自試みて欲しい。

2.6　完全性と健全性

重要語: 意味論的方法、構文論的方法、完全性、健全性、無矛盾、決定可能性

今まで見てきたように、命題論理では、論理式の真理値に対し、すべての可能なモデルを考えることでその真理値を決定する方法 (意味論的方法) と、公理系に基づいた証明による方法 (構文論的方法) の二つの体系がある。

しかしこれらの二つの体系の間の関係はよく考えて見ないと等価であるかがわからない。また公理系は適当な個数の公理と推論規則を与えれば (形の上では少なくとも) 作れるので、「どの」公理系もちゃんとできているとは限らない (つまり、いいかげんな定理を作り出してしまう可能性がある) からである。

以下の概念は公理系の性質についてのものである。以下では恒真式とは真理値表に代表される意味論的な体系の概念で、定理式とは公理系に代表される構文論的な体系の概念であることに注意して欲しい。

定義 2.16　完全性 (completeness)

ある公理系が完全 (complete) であるというのは、どの恒真式も定理式であることである。

定義 2.17　健全性 (soundness)

ある公理系が健全 (sound) であるというのは、どの定理式も恒真式であることである。

定義 2.18　無矛盾性 (consistency)

ある公理系が無矛盾 (consistent) であるというのは、そこからどの論理式 P に対しても、P と $\sim P$ の両方が証明可能とはならないことである。

ここで述べた Russell と Whitehead による公理系は、完全で、健全で、しかも無矛盾であることが分かっている。

定義 2.19　決定可能性 (decidability)

任意の論理式に対し、それが定理か否かを決定するアルゴリズムがあるとき、決定可能 (decidable) である、という。

命題論理は、決定可能である。しかし、一階述語論理以上の高階の論理はそうではない。

2.7　まとめ

命題論理の構文論 (2.1 節) と意味論 (2.2) を定義し、真理値表によって論理式の意味を決定する方法を紹介した。命題論理における論理式の解釈について述べ、命題の真理値を決定するための数学的な概念、モデルを導入した (2.3 節)。またモデルの観点から恒真式、

矛盾式、充足可能式の区別を行なった。命題論理の任意の論理式に対し、それと同値な連言標準形を求めるアルゴリズムを紹介した (2.4 節)。構文的に論理式がどのモデルでも真であることを示すための体系として、Russell と Whitehead による公理系について述べ、公理系で論理式を証明する手続きを紹介した (2.5 節)。また、命題論理の公理系が完全で健全であること、つまり恒真式と定理式が同値であることを述べた (2.6 節)。

演習 2.10 命題論理の演習問題

1. 演繹定理を使って $P \to P$ を公理系により証明せよ。
2. 演繹定理を証明せよ。
3. $\Gamma, A \vdash B$ かつ、$\Gamma, \sim A \vdash B$ ならば $\Gamma \vdash B$ であることを証明せよ。
4. 命題論理式の恒偽性を判定する方法として、Davis-Putnam 法がある。これは、連言標準形で表された論理式 $F = F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ に対して、次のようなステップを繰り返して判定を行なうものである。このアルゴリズムが正しいことを示せ。

   step 1 l を任意のリテラルとする。$F_i = l$、$F_j = \sim l$ なる F_i, F_j が存在するなら、元の論理式は充足不能。

   step 2 l を任意のリテラルとする。$l \vee \sim l$ を含む節を F からすべて取り除く。取り除いた結果が空なら、元の論理式は充足可能。

   step 3 F_i がただ一つのリテラル l からなる場合、F から F_i を取り除く。その結果が空ならば充足可能、空でなければすべての F から $\sim l$ を取り除く。

   step 4 リテラル l が F 中にあり、$\sim l$ が F 中にない場合、l を含む節を F からすべて取り除く。その結果が空ならば充足可能。

   step 5 F がリテラル l を含み、$(l \vee A_1) \wedge \ldots \wedge (l \vee A_m) \wedge (\sim l \vee B_1) \wedge \ldots \wedge (\sim l \vee B_n) \wedge R$ という形であれば、$(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \wedge R) \vee (B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge R)$ に置き換えられる。これを連言標準形に直したものを新たに F とする。

第 3 章

一階述語論理

一階述語論理 (First Order Logic, FOL) は、命題を単位としていた命題論理よりも大きな記述力を持つ。それは、命題を述語とその引数である項とに分けて考え、そして量化記号を導入したことによるものである。

ここでは、構文論と意味論からなる形式的体系、論理式の標準形、公理系、などを学ぶ。

3.1 構文論

重要語: 一階述語論理の構文論、項、述語、個体定項、個体変項、関数記号、述語記号、量化記号、全称量化子、存在量化子、論理式、スコープ、束縛変項、自由変項、冠頭連言標準形

一階述語論理においても命題論理と同様に「言葉」が定義される。一階述語論理は、その名前が表すように「述語」が言葉の中心である。命題論理では例えば「雨が降っている」という命題はこれ以上分解できないものとしていた。しかし一階述語論理は、この命題を「雨 (が)」と「降っている」に分解して扱う。「雨」に当たるものを**項** (term) と呼び、「降っている」に当たるものを**述語** (predicate) と呼ぶ。そして述語と項の組合せから命題が構成されると考えるのである[*1]。これは、命題論理と比べて、我々が日常的に用いている言葉にかなり近いものである。そのため、命題論理よりも述語論理の方が記述力が高い— すなわち、いろいろな事象を表現でき、それら事象の関係を記述しやすい。また、その分、複雑でもある。

3.1.1 一階述語論理の構文論の用語

一階述語論理では、命題論理にはなかった項や述語以外にもいろいろな重要な概念が導入される。

定義 3.1 定項、変項、関数記号、述語記号、量化記号 (量化子)

個体定項 (individual constant) $a,\ b,\ c,\ \ldots$
個体変項 (individual variable) $x,\ y,\ z,\ \ldots$

[*1] 日本語では、項が述語に対しどのような役割 (主語や目的語という役割) を果たすかは格助詞によって表わされる。それに対し述語論理では、英語などと同様、述語の引数の順番で表わされる。普通 1 番目の引数が主語、2 番目の引数が目的語、というような慣習がある。一般的には述語の意味によって定義される。

(n 項の) **関数記号** (function symbol) $f,\ g,\ \ldots$
(n 項の) **述語記号** (predicate symbol) $P,\ Q,\ \ldots$
量化記号 (quantifier、量化子ともいう) とは、全称記号 (全称量化子、universal quantifier) $\forall$、および存在記号 (存在量化子、existential quantifier) $\exists$ である。

個体定項と個体変項が項、つまり主語や目的語になりうるものである。関数記号は項と組合されて、項を構成する。述語記号は述語を表わす。関数記号も述語記号も、それぞれいくつの項を引数とするかが決められている。例えば引数を１つとるものは「1 項」の関数／述語記号、2 つとるものは「2 項」の関数／述語記号、などとよばれる。複数の項を引数に取る場合は、引数となる項はコンマ (,) で区切られる。

また量化記号は最も重要な概念である。これについては後で詳しく述べる。

定義 3.2 項 (Term)

1. どの個体定項も、**項**である。
2. どの個体変項も、**項**である。
3. n を自然数とし、$t_1, \ldots, t_n$ が項、f が n 項の関数記号の時、$f(t_1, \ldots, t_n)$ も**項**である。
4. これら以外は項ではない。

繰り返しになるが、項は「述語」の主語や目的語の役割を果たすものである。自然言語で言えば固有名や代名詞、具体的な物をさす名詞句に相当する。そして、個体定項は自然言語でいえば固有名、個体変項は代名詞、関数記号は「関数的名詞」[*2]に相当する。項と述語を組み合わせて、自然言語の「単文」にあたる「基本論理式」が定義される。

定義 3.3 (一階述語論理の) 基本論理式 (原子論理式ともいう、atomic formula)

n を自然数とし、$t_1, \ldots, t_n$ が項、P が n 項の述語記号の時、$P(t_1, \ldots, t_n)$ は**基本論理式**である。

基本論理式が最小の「論理式」である。命題論理と同様に、論理結合記号と論理式の組合わせによって複雑な (一般の) 論理式が定義される。さらに、命題論理とは異なり、量化記号をもつ論理式が導入される。

定義 3.4 (一階述語論理の) 論理式

1. 基本論理式は論理式である。
2. ϕ が論理式ならば、$\sim \phi$ は論理式である。
3. $\phi,\ \psi$ が論理式ならば、$\psi \wedge \phi$、$\psi \vee \phi$、$\phi \to \psi$、$\phi \leftrightarrow \psi$ も論理式である。
4. ϕ が論理式で x が個体変項ならば、$\forall x \phi$ は論理式である。
5. ϕ が論理式で x が個体変項ならば、$\exists x \phi$ は論理式である。
6. これら以外は論理式ではない。

[*2] 「関数的名詞」とは、「父」や「母」や「名前」のように、「誰それの X」という形で用いられる名詞であり、「誰それ」が決ればその指示対象が 1 通りに決るようなものである。例えば「花子の父」は、1 項の関数記号 $father$ と「花子」に対応する個体定項 $hanako$ を用いて $father(hanako)$ のように表わされる。なお「友達」や「兄弟」は対象が一意に決らないので関数的名詞ではなく、「関係的名詞」と呼ばれる。

ここで、量化記号の間に以下のような関係が成り立つとしておく (ϕ は任意の一階述語論理の論理式)。

- $\exists x\phi \equiv \sim \forall x(\sim \phi)$
- $\forall x\phi \equiv \sim \exists x(\sim \phi)$

命題論理の場合、命題変項一個でも論理式であった。それに対し、一階述語論理では命題変項というものは存在せず、項と述語記号の組み合わせにより論理式が作られる。そして、その論理式に対して真理値が割当てられる。

3.1.2 量化子のスコープと束縛・自由変項

一階述語論理で導入された量化子は必ず個体変項と論理式と組み合わされることによって論理式を構成することに注意しよう。言い換えれば、いつも**量化子は個体変項と論理式と 3 つ組み**として現れる[*3]。例えば、$\forall xP(x)$ では、$\forall$ と x と $P(x)$ が組である。また $\exists y\forall xP(x,y)$ では、$\exists$ と y と $\forall xP(x,y)$ が組であり、この最後の要素の論理式 $\forall xP(x,y)$ はさらに $\forall$ と x と $P(x,y)$ という 3 つ組みになっているのである。

量化子と組になっている変項は、もう一つの 3 つ組の要素である論理式において「どの変項がその量化子と関係しているか」を表すためだけのものである。例えて言えば、プログラミング言語の関数定義における仮引数のようなものである。だから、**変項の名前には意味がない**。言い換えれば、どういう変項を使うかによって論理式の意味が影響されるものではない。つまり、$\forall xP(x)$ と書いても、$\forall yP(y)$ と書いても、$\forall zP(z)$ と書いても、これらは「同値な論理式」とみなされるのである。

量化子の導入により、**束縛**と**自由**という、変項に対する重要な区別が行なわれる。また、量化子の「スコープ (作用範囲, scope)」という概念が導入される。このスコープとは、いわば量化子の「縄張り」のようなもので、量化子のスコープとは、その量化子の組となっている論理式のことである。その論理式中にあり、量化子の組となっている変項と同じ名前の変項が、その量化子の「束縛」の対象となる変項である。

定義 3.5 束縛変項と自由変項、スコープ、閉論理式

- $\forall x\phi$ や $\exists y\psi$ の形の論理式において、ϕ や ψ をそれぞれ量化子 $\forall$ や $\exists$ の**スコープ** (作用範囲、scope) という。
- $\forall x\phi$ や $\exists y\psi$ という形の論理式において、ϕ 中の x や、ψ 中の y は、それぞれ量化子 $\forall$ および $\exists$ によって束縛されているという。量化子によって束縛されている変項を**束縛変項** (bound variable) という (ϕ や ψ はそれぞれの量化子のスコープになっていることに注意) 。また、ある論理式 ϕ において変項 x が束縛変項の場合、その変項 x はその論理式 ϕ において束縛されている、という。
- どの量化子によっても束縛されていない変項、言い換えれば束縛変項でない変項を**自由変項** (free variable) という。また、ある論理式 ϕ だけを抜き出して考えた場

[*3] かなり省略した書き方では、同じ量化子が用いられる場合 $\forall x_1 \dots x_n\phi$ のように変項を複数個書くこともある。しかし、これは、本来 $\forall x_1\forall x_2 \dots \forall x_n\phi$ と書くものであるという暗黙の了解があってのことである。

合に、ある変項 x が自由変項の場合、x は論理式 ϕ において自由である、という[*4]。

- 自由変項をもたない論理式を**閉論理式**という。

参考: プログラミング言語に例えると、関数定義の中ではその関数の仮引数 (局所変数) は束縛変項、大局 (グローバル) 変数は自由変項とみなせる。

例 3.1　束縛と自由、スコープについて

- $\forall x P(x,y)$：$P(x,y)$ の x は全称量化子 $\forall$ によって束縛されている。また y は束縛する量化子が存在しないので自由変項である。
- $\forall x P(x,y) \wedge \exists y Q(x,y)$: **量化子のスコープは狭くとる**。つまりここでは、$\forall$ のスコープは $P(x,y)$ だけである。したがって、$P(x,y)$ の x は全称量化子 $\forall$ によって束縛されているが、y は自由変項である。また $Q(x,y)$ の y は存在量化子 $\exists$ によって束縛されているが、x は自由変項である。
- $\forall x P(a)$: a は個体定項であり変項ではないので、束縛、自由という概念は適用されない。したがって、この例では自由変項も束縛変項もない。
  この例のように、スコープの中に束縛変項を持たない量化子を「**空虚な量化子**」という。
- $\forall x \exists x P(x)$: $P(x)$ の x は**一番内側の**量化子 $\exists$ によって束縛され、外側の量化子 $\forall$ とは無関係である。つまりこの全称量化子も空虚な量化子の例である。
  この例のように、どの変項に対しても、それが自由変項でなければ、ただ一つの量化子だけが束縛する。そしてその量化子は、その変項をスコープの中に持ち、かつその変項を 3 つ組の要素とする**最も内側の量化子**である。

演習 3.1　以下の式において、束縛変項と自由変項をそれぞれマークせよ。また、束縛変項に対しては、それを束縛する量化子も明示すること。さらに、すべての量化子に対してそのスコープを示せ。

1. $\forall x P(x) \vee Q(x,y)$
2. $\forall y(Q(x) \rightarrow \forall z P(y,z))$
3. $\forall x \sim (P(x) \rightarrow \exists y \forall z Q(x,y,z))$
4. $\exists x Q(x,y) \wedge P(y,x)$
5. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(Q(y) \rightarrow \forall z R(y,z)))$

3.1.3　冠頭連言標準形

命題論理において連言標準形があるように、述語論理には冠頭連言標準形という標準形が存在する。

ここでも、命題論理と同様にリテラル、節、連言標準形という用語を用いる。

定義 3.6　**冠頭連言標準形** (prenex normal form)

[*4] 例えば、$\exists y \forall x P(x,y)$ という論理式に現れている (部分) 論理式 $\forall x P(x,y)$ を考えた場合、$P(x,y)$ 中の x は束縛変項であるが、y は自由である。そこで、「y は論理式 $\forall x P(x,y)$ において自由」という。

$Q_1, \ldots, Q_n$ を量化記号 (つまり $\forall$ か $\exists$) とし、$x_1, \ldots, x_n$ を変項とし、ϕ は量化記号を含まない連言標準形の論理式とすると、どのような述語論理式に対しても、同値な

$$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\phi$$

という形の論理式が存在する。この形の論理式を元の論理式に対する**冠頭連言標準形**という。

ここで、$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ を頭部 (prefix) といい、ϕ を母式 (matrix) という。

例えば、$\exists z\exists x(P(x) \to\sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists xR(y,x)])$ に対する冠頭連言標準形は、

$$\exists x\forall y\forall z[(\sim P(x)\vee \sim Q(x,y)) \wedge (\sim P(x)\vee \sim R(y,z))]$$

である。ここで、$\exists x\forall y\forall z$ が頭部、$(\sim P(x)\vee \sim Q(x,y)) \wedge (\sim P(x)\vee \sim R(y,z))$ が母式である。

命題論理において連言標準形を求めるアルゴリズムがあったように、一階述語論理には冠頭連言標準形を求めるアルゴリズムが存在する。これは見てわかるように、連言標準形を求めるアルゴリズムの拡張になっている。以下では、$\exists z\exists x(P(x) \to \sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists xR(y,x)])$ を例として説明する。

定義 3.7 **冠頭連言標準形を求めるアルゴリズム**

以下の 6 つのステップを順に適用する。ただし、対象とする論理式によっては、すべてのステップを適用するとは限らないことに注意せよ。

1. 空虚な (vacant) 量化子と、その組となる変項を除去する。ここで、空虚な量化子とは、量化記号を Q とし変項を x として、$Qx\phi$ という形の論理式において、部分論理式 ϕ に自由な変項 x が現れないような量化子 Q のことであった。
先の例 $\exists z\exists x(P(x) \to\sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists xR(y,x)])$ では、先頭の量化子 $\exists$ が空虚な量化子である。そこで、これとそれに続く変項 (z) とを削除し、$\exists x(P(x) \to \sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists xR(y,x)])$ とする。
2. 対象とする論理式において、同じ「名前の」変項を組とする量化子が複数個あったとき、同じ「名前の」変項を組とする量化子がただ 1 つになるよう、変項とスコープ内の束縛変項すべてを一斉に別な名前の変項に変える。例えば、$\forall xP(x) \wedge \exists xQ(x,x)$ においては、x という変項を $\forall$ と $\exists$ という 2 つの量化子が組としている。そこで $\exists$ の方の変項を x から y に変えるとすれば、$\forall xP(x) \wedge \exists yQ(y,y)$ となる。
先の例 $\exists x(P(x) \to \sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists xR(y,x)])$ では、先頭の $\exists$ と最後にある $\exists$ が「同じ名前の変項」x を組に持つ量化子であるので、束縛変項の名前の変更を行わなければならない。そこで、$\exists xR(y,x)$ の方の変項 x を z に変えることにすれば、$\exists x(P(x) \to \sim \exists y[Q(x,y) \vee \boxed{\exists zR(y,z)}])$ が得られる。
3. 論理結合記号 $\leftrightarrow$ および $\to$ を含む論理式の置換。以下の同値式を用いる。
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \quad \equiv (\sim \alpha \vee \beta) \wedge (\sim \beta \vee \alpha)$
$\alpha \to \beta \equiv \sim \alpha \vee \beta$
先の例では、$\to$ が用いられているので、これを含む論理式 $(\boxed{\mathrm{P(x)}} \to \boxed{\sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists zR(y,z)]})$ を同値な論理式で置換する。その結果、

$\exists x(\sim \boxed{\mathrm{P(x)}} \vee \boxed{\sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists z R(y,z)]})$ となる。

4. 以下の同値式を用いて、否定記号が基本論理式の直前にだけ現れる形に変換する。
$\sim\sim \alpha \equiv \alpha$
$\sim (\alpha \vee \beta) \equiv \sim \alpha \wedge \sim \beta$　　　$\sim (\alpha \wedge \beta) \equiv \sim \alpha \vee \sim \beta$
$\sim \exists x\phi \equiv \forall x(\sim \phi)$　　　$\sim \forall x\phi \equiv \exists x(\sim \phi)$
例では 、$\sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists z R(y,z)]$ という式が含まれているので、以下のように同値な式を何回か用いて否定記号が基本論理式の直前にだけ現れるようにする:
$\exists x(\sim P(x) \vee \sim \exists y[Q(x,y) \vee \exists z R(y,z)])$
$\Rightarrow \quad \exists x(\sim P(x) \vee \forall y \sim [Q(x,y) \vee \exists z R(y,z)])$
$\Rightarrow \quad \exists x(\sim P(x) \vee \forall y[\sim Q(x,y) \wedge \sim \exists z R(y,z)])$
$\Rightarrow \quad \exists x(\sim P(x) \vee \forall y[\sim Q(x,y) \wedge \forall z \sim R(y,z)])$

5. 量化子がすべて外側にある論理式に変換する。つまり、見かけ上、量化子がすべて左側に寄せられているような論理式とする。記号を用いて表わすと、Q_i を量化子、x_j を変項、ϕ を量化子を含まない論理式とすれば、$Q_1x_1(Q_2x_2(\ldots(Q_nx_n\phi)))$ という形の論理式に変える。必要ならばこれらを繰り返して、「冠頭形」を作る。
ここで、変換前の論理式が以下にあげる左の形 (ψ は量化子を含まない論理式で、量化子のスコープの外にある論理式) であれば、右の形にすることで冠頭形を作る。

$$\forall x\phi \wedge \psi \Longrightarrow \forall x(\phi \wedge \psi) \qquad \forall x\phi \vee \psi \Longrightarrow \forall x(\phi \vee \psi)$$
$$\exists x\phi \wedge \psi \Longrightarrow \exists x(\phi \wedge \psi) \qquad \exists x\phi \vee \psi \Longrightarrow \exists x(\phi \vee \psi)$$

上のパタンにあてはまらない場合、つまり複数の量化子がある場合は次の原則によって変換する。

(a) スコープの包含関係を維持する。元の論理式が $Q_1x_1 \cdots Q_ix_i(Q_kx_k(\cdots))$ という形の場合 ($1 \le j \le i,k$ に対して、Q_j が量化子、x_j が変項とする)、量化子 Q_i のスコープの中に量化子 Q_k が含まれているので、この包含関係を維持して、$Q_1x_1 \cdots Q_ix_iQ_kx_k(\cdots))$ という形にする。

(b) 上記以外、つまり互いのスコープが包含関係にない場合。
同じ種類の量化子、つまりどちらも存在量化子 (もしくは全称量化子) ならば、どちらを外側 (左側) にしてもよい。例えば、$\forall x\psi \wedge \forall y\phi$ は $\forall x\forall y(\psi \wedge \phi)$ に、また $\exists x\psi \vee \exists y\phi$ は $\exists x\exists y(\psi \vee \phi)$ などとする。
しかし、存在量化子と全称量化子が混在している場合には、**存在量化子の方を全称量化子よりも外側になる (よりスコープをもつ) よう**な論理式に変換する。例えば、$\forall x\psi \wedge \exists y\phi$ は $\exists y\forall x(\psi \wedge \phi)$ に、また $\exists x\psi \vee \forall y\phi$ は $\exists x\forall y(\psi \vee \phi)$ とする。

これらにより、先の例 $\exists x(\sim P(x) \vee \forall y[\sim Q(x,y) \wedge \forall z \sim R(y,z)])$ は、

$$\Longrightarrow \exists x\forall y(\sim P(x) \vee [\sim Q(x,y) \wedge \forall z \sim R(y,z)])$$
$$\Longrightarrow \exists x\forall y(\sim P(x) \vee \forall z[\sim Q(x,y) \wedge \sim R(y,z)])$$
$$\Longrightarrow \exists x\forall y\forall z(\sim P(x) \vee [\sim Q(x,y) \wedge \sim R(y,z)])$$ と変形する。

注意 1. ここで用いられる「規則」は一般には成立しない。実際には、この規則の適用には「ψ には自由な変項 x を含まない」という条件が必要である。しかし、冠頭連言標準形を作る過程においては成立するとしてよい (問題: なぜか？)。

注意 2. 存在量化子同士、もしくは全称量化子同士が互いに互いのスコープにな

い場合、どちらを外側にしても構わない。例えば、$\forall x\phi \wedge \forall y\psi$ のような式の場合、$\forall x\forall y(\phi \wedge \psi)$ としても、$\forall y\forall x(\phi \wedge \psi)$ としてもよい。

注意 3. 存在量化子と全称量化子が互いに互いのスコープにない場合、例えば、$\forall x\phi \wedge \exists y\psi$ のような式の場合は、存在量化子を必ず外側にする (つまりより広いスコープをとるようにする)。従って、この例の場合、$\exists y\forall x(\phi \wedge \psi)$ とする。

6. 必要ならば、次の分配則を用いて、「母式」を連言形にする。
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
   先の例では、$\exists x\forall y\forall z(\sim P(x) \vee [\sim Q(x,y) \wedge \sim R(y,z)])$
   $\Rightarrow \quad \exists x\forall y\forall z[\ \boxed{(\sim P(x) \vee \sim Q(x,y))} \wedge \boxed{(\sim P(x) \vee \sim R(y,z))}\ ]$ となる。

すでに注意したが、大事なことなのでここで重ねて注意しておく。それは量化子の扱いである。

例えば、$\forall x(P(x) \wedge \exists y \ldots)$ という式ならば、$\forall x$ が $\exists y$ をそのスコープに含むから、$\forall x\exists y(P(x)\ldots)$ というように、$\forall x$ を $\exists y$ よりも左側に書く。つまりある量化子が他の量化子をそのスコープに含む場合は、その量化子を他方の量化子よりも常に外側にあるように変換する*5。

しかし、$\forall xP(x) \wedge \exists yQ(y)$ という式ならば、全称量化子 $\forall x$ と存在量化子 $\exists y$ は互いに互いのスコープ内にないので、この場合は存在量化子の方を外側にした $\exists y\forall x(P(x) \wedge Q(y))$ を冠頭連言標準形として選ぶ。

演習 3.2　以下の式の冠頭連言標準形を求めよ。ただし、x, y, z は個体変項であり、a, b は個体定項とする。また、詳細な変換過程も示すこと。

1. $\forall x(P(x) \to \exists yQ(x,y))$
2. $\forall x \sim (Q(x,x) \to \forall y \sim P(y))$
3. $\exists x(P(x) \to \exists y(Q(x,y) \to R(x,y)))$
4. $\forall x\forall y(P(x,y) \wedge Q(x,y)) \to \forall x\forall yR(x,y)$
5. $\forall x(P(a,b) \to \exists y(Q(a,y) \vee R(y,y)))$
6. $\forall x\forall y((P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge \sim \forall x\forall y(R(x,y) \vee P(x,x)))$
7. $\exists x(\sim (\exists yP(x,y)) \to (\exists zQ(z) \to R(x)))$
8. $\forall x\forall y(\exists zP(x,y,z) \wedge (\exists uQ(x,u) \to \exists vQ(y,v)))$
9. $\sim \forall x\{(P(x) \wedge \exists y[Q(x,y) \vee R(y)]) \to \exists zS(x,z)\}$
10. $\sim \forall x\{P(x) \vee \exists y[(Q(x,y) \to Q(y,x)) \vee \forall z(Q(y,z) \to R(x))]\}$
11. $\forall x\{(P(x) \vee \sim W(x)) \to \sim \exists y[Q(x,y) \wedge \forall zR(y,z)]\}$
12. $\exists x \sim \{(P(x) \vee W(x)) \to \exists y[\sim Q(x,y) \vee \exists zR(y,z)]\}$

3.2 意味論

重要語: 一階述語論理の意味論、モデル、定義域、解釈関数、
割当関数、充足可能、恒真、妥当、論理的帰結

*5 要するに、量化子の間に外側、内側の順番があれば、その順番を守る、ということ。

命題論理と同様、論理式の真理値を明らかにすることが意味論の目的である。

論理式の真理値は一般に、対象とする世界によって決まる。この世界のことを論理学ではモデル (model) と呼ぶ。

命題論理では、モデルは真となる基本命題の集合として表された。しかし述語論理においては、基本命題はもはや基本単位ではなく、述語と項に分解される。したがって、モデルも命題論理とは異なる構成を持つ。すなわち、述語論理においてモデル ($\mathcal{M}$ で表される）は、**定義域**と呼ばれる個体の集合 ($\mathcal{D}$ で表される) と、**解釈関数** ($\mathcal{F}$ で表される) とから構成される。

定義 3.8　一階述語論理のモデル

一階述語論理のモデル $\mathcal{M}$ は次のような $\mathcal{D}$ と $\mathcal{F}$ の順序対であり、$\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ と表される。ここで、$\mathcal{D}$ は空でない (個体の) 集合、F は次のような解釈関数である。

どの個体定項 c に対しても、$\mathcal{F}(c) \in \mathcal{D}$

どの n 項述語 P_n に対しても、$\mathcal{F}(P_n) \subseteq \mathcal{D}^n$

ここで、$\mathcal{D}^n$ は $\mathcal{D}$ の要素の n 項組、つまり $\underbrace{\mathcal{D} \times \mathcal{D} \times \ldots \times \mathcal{D}}_{\text{n 個}}$ である。

つまり、個体定項は $\mathcal{D}$ の要素である個体を表すものとして、n 項述語は個体の n 項組の集合を表すものとして解釈されるのである。

変項に対しては、次の割り当て関数によって個体と対応づけられる。ここで、変項を「代名詞」と考え、割り当て関数を「その代名詞が指す対象を与える文脈」と考えると分かりやすいだろう。

定義 3.9　**割り当て関数** (assignment function)

割り当て関数 g は、個体変項を定義域とし、$\mathcal{D}$ の要素、つまり個体を値域とする関数である。

これらにより、個体定項も個体変項も、「項」と呼ばれるものは、解釈として定義域 $\mathcal{D}$ 中の個体が与えられる。また、述語に対しては、個体の集合、もしくは個体の n 項組の集合が解釈となる。

論理式の真理値を議論するために、一つ技術的な概念が必要である。それは、割り当て関数の変種 (variant) という概念である。

定義 3.10　**割り当て関数の変種** (variant of assignment function)

g を割り当て関数、x を変項とする。このとき、g' が g の x **変種**であるとは、x 以外のすべての変項 u に対して $g(u) = g'(u)$ となる時であり、かつそのときにかぎる。

直感的には、g' が g の x **変種**であるとは、x という「代名詞」以外のどの「代名詞」に対しても g と一致するような「文脈」とみなせる。

3.2.1　論理式の解釈—真理値の決定

モデルは、項には定義域中の要素 (個体) を、述語には集合を解釈として与える。これらを組み合わせて、論理式の真理値が計算される。

定義 3.11　**項の解釈** (Interpretation)

- $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ をモデル、g を $\mathcal{M}$ 中の変項に対する割り当て関数、τ を項とする
- 「$\mathcal{M}$ と g に関する項 τ の**解釈**」によって意味するのは以下である。これを $I^g_{\mathcal{F}}(\tau)$ と表す。
  1. τ が定項の場合、 $\mathcal{F}(\tau)$
  2. τ が変項の場合、 $g(\tau)$
  3. τ が関数 $f_n(t_1, \ldots, t_n)$ の場合、$\mathcal{F}(f)(I^g_{\mathcal{F}}(\tau_1), \cdots, I^g_{\mathcal{F}}(\tau_n))$
     つまり、n 項の関数 $\mathcal{F}(f)$—これが関数記号 f の解釈—を、その引数である n 個の項 $(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ の解釈に適用する。

これを用いて行われる論理式の真理値の計算を、量化子を含む論理式とそうでない論理式とに分けて示す。実際には、これは間接再帰的な定義になっていることに注意せよ。

定義 3.12　**述語論理式の解釈** (**真理値の決定**)— 量化子が関与しない論理式 の解釈

論理式 ϕ がモデル $\mathcal{M}$ と割り当て関数 g の下で真であることを $\mathcal{M}, g \models \phi$ で表す。なお、 論理式 ϕ がモデル $\mathcal{M}$ と割り当て関数 g の下で真でない (つまり、偽である) ことは $\mathcal{M}, g \not\models \phi$ で表す。

1. 基本論理式 $R(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ に対し、$\mathcal{M}, g \models R(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ であるための必要十分条件は、
   $\langle I^g_{\mathcal{F}}(\tau_1), \cdots, I^g_{\mathcal{F}}(\tau_n) \rangle \in \mathcal{F}(R)$
   ただし、$n = 1$ の場合は $I^g_{\mathcal{F}}(\tau_1) \in \mathcal{F}(R)$ とする。言い換えれば、どの α に対しても、$\langle \alpha \rangle = \alpha$ とする。
2. 否定の論理結合記号: ϕ を任意の論理式とすると、$\mathcal{M}, g \models \sim \phi$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g \models \phi$ でないこと (もしくは、$\mathcal{M}, g \not\models \phi$)。
3. 連言の論理結合記号: ϕ, ψ を任意の論理式とすると、$\mathcal{M}, g \models \phi \wedge \psi$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g \models \phi$ かつ $\mathcal{M}, g \models \psi$ であること。
4. 選言の論理結合記号: ϕ, ψ を任意の論理式とすると、$\mathcal{M}, g \models \phi \vee \psi$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g \models \phi$ または $\mathcal{M}, g \models \psi$ であること。
5. 含意の論理結合記号: ϕ, ψ を任意の論理式とすると、$\mathcal{M}, g \models \phi \rightarrow \psi$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g \not\models \phi$ または $\mathcal{M}, g \models \psi$ であること。

定義 3.13　**述語論理式の解釈** (**真理値の決定**)— 量化子が関与する論理式 の解釈

$\mathcal{M}$ をモデル、g を割り当て関数、x を変項、ϕ を論理式とする。

1. 存在量化子: $\mathcal{M}, g \models \exists x \phi$ であるための必要十分条件は、g のある x 変種 g' に対して、$\mathcal{M}, g' \models \phi$ であること。言い換えれば、$\mathcal{M}, g' \models \phi$ となるような g の x 変種 g' が存在すること。

2. 全称量化子: $\mathcal{M}, g \models \forall x\phi$ であるための必要十分条件は、g のどの x 変種 g' に対しても、$\mathcal{M}, g' \models \phi$ であること。

定義 3.14　**述語論理式の解釈 (真理値の決定)**：一般形

> 論理式 ϕ がモデル $\mathcal{M}$ において真であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}$ において「どの」割り当て関数 g に対しても $M, g \models \phi$ であること。

慣れないうちは、これらの定義は分かりにくいことであろう。そこで、具体的に論理式の解釈についての例をいくつか示そう。

例 3.2　$\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ をモデルとし、$\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$ とする。また、定項 a, b に対して $\mathcal{F}(a) = d_1, \mathcal{F}(b) = d_2$ とし、1 項述語 P と 2 項述語 Q に対して $\mathcal{F}(P) = \{d_1\}$, $\mathcal{F}(Q) = \{\langle d_1, d_1 \rangle, \langle d_2, d_2 \rangle\}$ とする。

- $\mathcal{M}$ における $P(a)$ の真理値: $P(a)$ は基本論理式であり、P が述語、a はその項である。どんな割り当て関数 g に対しても (定義 3.12(1) から)、$\mathcal{M}, g \models P(a)$ であるための必要十分条件は $I^g_{\mathcal{F}}(a) \in \mathcal{F}(P)$
  ここで定義 3.11 から、$I^g_{\mathcal{F}}(a) = \mathcal{F}(a) = d_1$、$\mathcal{F}(P) = \{d_1\}$ より、この条件 (つまり $d_1 \in \{d_1\}$) が成り立つ。ゆえに、 論理式 $P(a)$ はモデル $\mathcal{M}$ において真 (T) である。
- $\mathcal{M}$ における $\sim P(a)$ の真理値: 定義 3.12(2) から、どんな割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \sim P(a)$ であるための必要十分条件は $I^g_{\mathcal{F}}(a) \in \mathcal{F}(P)$ でないこと。
  ここで、上述より、論理式 $P(a)$ はモデル $\mathcal{M}$ において真である。ゆえに、$\mathcal{M}, g \models \sim P(a)$ は成り立たない。ゆえに論理式 $P(a)$ はモデル $\mathcal{M}$ において偽 (F) である。
- $\mathcal{M}$ における $P(b) \to Q(b,b)$ の真理値: 定義 3.12(5) から、どんな割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models P(b) \to Q(b,b)$ であるための必要十分条件は $\mathcal{M}, g \not\models P(b)$ もしくは $\mathcal{M}, g \models Q(b,b)$ であること。
  ここで、$\mathcal{M}, g \not\models P(b)$ が成り立つための必要十分条件は (定義 3.12(1) から)$\mathcal{M}, g \models P(b)$ でないこと。ゆえに $I^g_{\mathcal{F}}(b) \notin \mathcal{F}(P)$ が必要十分条件。これは $\mathcal{F}(b) = d_2 \notin \{d_1\}$ より成り立つ。ゆえに ($\mathcal{M}, g \models Q(b,b)$ が成り立つかどうかを調べる必要なく) 論理式 $P(b) \to Q(b,b)$ はモデル $\mathcal{M}$ において真 (T) である。
- $\mathcal{M}$ における $\exists x P(x)$ の真理値: 定義 3.13(1) から、どんな割り当て関数 g に対しても、g のある x 変種 g' に対して、$\mathcal{M}, g' \models P(x)$ であること。
  ここで $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$ から、g の x 変種は、x に対して d_1 を割り当てるものと、d_2 を割り当てるものの 2 通りしかない。それぞれ g_1 と g_2 としよう (つまり $g_1(x) = d_1$ かつ $g_2(x) = d_2$ であること以外は g_1 と g_2 は g と同じ関数)。
  ここで、$\mathcal{M}, g_1 \models P(x)$ が成り立つかどうかを調べる。定義 3.12(1) から、これが成り立つための必要十分条件は $I^{g_1}_{\mathcal{F}}(x) \in \mathcal{F}(P)$。ここで定義 3.11 により $I^{g_1}_{\mathcal{F}}(x) = g_1(x) = d_1$ であることから、$d_1 \in \mathcal{F}(P)$ と同じ。これは $\mathcal{F}(P) = \{d_1\}$ であることから成り立つ。
  ゆえに、少なくとも $\mathcal{M}, g_1 \models P(x)$ が成り立ったから、どの割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \exists x P(x)$ である。したがって論理式 $\exists x P(x)$ はモデル $\mathcal{M}$ において真 (T) である。

- $\mathcal{M}$ における $\forall x Q(x,x)$ の真理値: 定義 3.13(2) から、どんな割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \forall x Q(x,x)$ であるための必要十分条件は g のどの x 変種 g' に対しても、$\mathcal{M}, g' \models Q(x,x)$ であること。
ここで (上記と同様に) $\mathcal{D} = \{d_1, d_2\}$ から、g の x 変種は、x に対して d_1 を割り当てるものと、d_2 を割り当てるものの 2 通りしかない。それぞれ g_1 と g_2 としよう (つまり $g_1(x) = d_1$ かつ $g_2(x) = d_2$ であること以外は g_1 と g_2 は g と同じ関数)。
  1. ここで、$\mathcal{M}, g_1 \models Q(x,x)$ が成り立つかどうかを調べる。定義 3.12(1) から、これが成り立つための必要十分条件は $\langle I_{\mathcal{F}}^{g_1}(x), I_{\mathcal{F}}^{g_1}(x)\rangle \in \mathcal{F}(Q)$。ここで定義 3.11 により $I_{\mathcal{F}}^{g_1}(x) = g_1(x) = d_1$ であることから、$\langle d_1, d_1\rangle \in \mathcal{F}(Q)$ と同じ。これは $\mathcal{F}(Q) = \{\langle d_1, d_1\rangle, \langle d_2, d_2\rangle\}$ であることから成り立つ。
  2. $\mathcal{M}, g_2 \models Q(x,x)$ が成り立つかどうかを調べる。定義 3.12(1) から、これが成り立つための必要十分条件は $\langle I_{\mathcal{F}}^{g_2}(x), I_{\mathcal{F}}^{g_2}(x)\rangle \in \mathcal{F}(Q)$。ここで定義 3.11 により $I_{\mathcal{F}}^{g_2}(x) = g_2(x) = d_2$ であることから、$\langle d_2, d_2\rangle \in \mathcal{F}(Q)$ と同じ。これは $\mathcal{F}(Q) = \{\langle d_1, d_1\rangle, \langle d_2, d_2\rangle\}$ であることから成り立つ。

  ゆえに、g のどの x 変種 g' に対しても $\mathcal{M}, g' \models Q(x,x)$ が成り立つから、どの割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \forall x Q(x,x)$ である。したがって論理式 $\forall x Q(x,x)$ はモデル $\mathcal{M}$ において真 (T) である。

例 3.3　$\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F}\rangle$ をモデルとし、$\mathcal{D} = \{1,2\}$、$\mathcal{F}(P) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ とする。

- $\mathcal{M}$ における $\forall x \exists y P(x,y)$ の真理値:
この式は $\forall x(\exists y P(x,y))$ で表されるような構造をしていることに注意しよう。定義 3.13(2) から、どんな割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \forall x \exists y P(x,y)$ であるための必要十分条件は g のどの x 変種 g' に対しても、$\mathcal{M}, g' \models \exists y P(x,y)$ であること。
ここで $\mathcal{D} = \{1,2\}$ から、g の x 変種は、x に対して 1 を割り当てるものと、2 を割り当てるものの 2 通りしかない。それぞれ g_1 と g_2 としよう (つまり $g_1(x) = 1$ かつ $g_2(x) = 2$ であること以外は g_1 と g_2 は g と同じ関数)。
  1. まず、$\mathcal{M}, g_1 \models \exists y P(x,y)$ が成り立つかどうかを調べる。定義 3.13(1) から、これが成り立つための必要十分条件は g_1 の**ある** y **変種** g' **に対して**、$\mathcal{M}, g' \models P(x,y)$ であること。
  ここで $\mathcal{D} = \{1,2\}$ から、g_1 **の** y **変種**は、y に対して 1 を割り当てるものと、2 を割り当てるものの 2 通りしかない。それぞれ g_{11} と g_{12} としよう (つまり $g_{11}(y) = 1$ かつ $g_{12}(y) = 2$ であること以外は g_{11} と g_{12} は g_1 と同じ関数)。
  $\mathcal{M}, g_{11} \models P(x,y)$ であるための必要十分条件は定義 3.12(1) から $\langle I_{\mathcal{F}}^{g_{11}}(x), I_{\mathcal{F}}^{g_{11}}(y)\rangle \in \mathcal{F}(P)$。ここで $I_{\mathcal{F}}^{g_{11}}(x) = g_{11}(x) = 1$、$I_{\mathcal{F}}^{g_{11}}(y) = g_{11}(y) = 1$ であり、$\mathcal{F}(P) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ から、これは成り立つ。
  ゆえに、g_1 の y **変種である** g_{11} **に対して**、$\mathcal{M}, g_{11} \models P(x,y)$ であることが分かったから、$\mathcal{M}, g_1 \models \exists y P(x,y)$
  2. 次に、$\mathcal{M}, g_2 \models \exists y P(x,y)$ が成り立つかどうかを調べる。
  ここで $\mathcal{D} = \{1,2\}$ から、g_2 **の** y **変種**は、y に対して 1 を割り当てるものと、2 を割り当てるものの 2 通りしかない。それぞれ g_{21} と g_{22} としよう (つまり $g_{21}(y) = 1$ かつ $g_{22}(y) = 2$ であること以外は g_{21} と g_{22} は g_2 と同じ関数)。

(a) $\mathcal{M}, g_{21} \models P(x,y)$ であるための必要十分条件は定義 3.12(1) から $\langle I_{\mathcal{F}}^{g_{21}}(x), I_{\mathcal{F}}^{g_{21}}(y)\rangle \in \mathcal{F}(P)$。ここで $I_{\mathcal{F}}^{g_{21}}(x) = g_{21}(x) = 2$、$I_{\mathcal{F}}^{g_{21}}(y) = g_{21}(y) = 1$ であり、$\mathcal{F}(P) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ から、これは成り立たない。つまり、 $\mathcal{M}, g_{21} \not\models P(x,y)$

(b) $\mathcal{M}, g_{22} \models P(x,y)$ であるための必要十分条件は定義 3.12(1) から $\langle I_{\mathcal{F}}^{g_{22}}(x), I_{\mathcal{F}}^{g_{22}}(y)\rangle \in \mathcal{F}(P)$。ここで $I_{\mathcal{F}}^{g_{22}}(x) = g_{22}(x) = 2$、$I_{\mathcal{F}}^{g_{22}}(y) = g_{22}(y) = 2$ であり、$\mathcal{F}(P) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ から、これは成り立つ。

ゆえに、g_2 の y 変種である g_{22} に対して $\mathcal{M}, g_{22} \models P(x,y)$ が成り立つことが分かったから、$\mathcal{M}, g_2 \models \exists y P(x,y)$ である。

以上から、g のどの x 変種 g' に対しても $\mathcal{M}, g' \models \exists y P(x,y)$ であることが分かったから、$\mathcal{M}, g \models \forall x \exists y P(x,y)$ が成り立つ。
したがって論理式 $\forall x \exists y P(x,y)$ はモデル $\mathcal{M}$ において真 (T) である。

- $\mathcal{M}$ における $\exists y \forall x P(x,y)$ の真理値:
この式は $\exists y(\forall x P(x,y))$ で表されるような構造をしている。定義 3.13(1) から、どんな割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \exists y \forall x P(x,y)$ であるための必要十分条件は g のある y 変種 g' に対して、$\mathcal{M}, g' \models \forall x P(x,y)$ であること。
ここで $\mathcal{D} = \{1,2\}$ から、g の y 変種は、y に対して 1 を割り当てるものと、2 を割り当てるものの 2 通りしかない。それぞれ g_1 と g_2 としよう (つまり $g_1(y) = 1$ かつ $g_2(y) = 2$ であること以外は g_1 と g_2 は g と同じ関数)。

1. まず、$\mathcal{M}, g_1 \models \forall x P(x,y)$ が成り立つかどうかを調べる。定義 3.13(2) から、これが成り立つための必要十分条件は g_1 の**どの** x **変種** g' **に対しても、** $\mathcal{M}, g' \models P(x,y)$ であること。
ここで $\mathcal{D} = \{1,2\}$ から、g_1 **の** x **変種**は、x に対して 1 を割り当てるものと、2 を割り当てるものの 2 通りしかない。それぞれ g_{11} と g_{12} としよう (つまり $g_{11}(x) = 1$ かつ $g_{12}(x) = 2$ であること以外は g_{11} と g_{12} は g_1 と同じ関数)。
(a) $\mathcal{M}, g_{11} \models P(x,y)$ であるための必要十分条件は定義 3.12(1) から $\langle I_{\mathcal{F}}^{g_{11}}(x), I_{\mathcal{F}}^{g_{11}}(y)\rangle \in \mathcal{F}(P)$。ここで $I_{\mathcal{F}}^{g_{11}}(x) = g_{11}(x) = 1$、$I_{(}^{g_{11}}y) = g_{11}(y) = 1$ であり、$\mathcal{F}(P) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ から、これは成り立つ。
(b) $\mathcal{M}, g_{12} \models P(x,y)$ であるための必要十分条件は同様に $\langle I_{\mathcal{F}}^{g_{12}}(x), I_{\mathcal{F}}^{g_{12}}(y)\rangle \in \mathcal{F}(P)$。ここで $I_{\mathcal{F}}^{g_{12}}(x) = g_{12}(x) = 2$、$I_{\mathcal{F}}^{g_{12}}(y) = g_{12}(y) = 1$ であり、$\mathcal{F}(P) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ から、これは成り立たない。
つまり、g_1 の y 変種 g_{12} に対して $\mathcal{M}, g_{12} \not\models P(x,y)$ であることから、$\mathcal{M}, g_1 \not\models \forall x P(x,y)$
2. 次に、$\mathcal{M}, g_2 \models \forall x P(x,y)$ が成り立つかどうかを調べる。
ここで $\mathcal{D} = \{1,2\}$ から、g_2 **の** x **変種**は、x に対して 1 を割り当てるものと、2 を割り当てるものの 2 通りしかない。それぞれ g_{21} と g_{22} としよう (つまり $g_{21}(x) = 1$ かつ $g_{22}(x) = 2$ であること以外は g_{21} と g_{22} は g_2 と同じ関数)。
ここで、 $\mathcal{M}, g_{21} \models P(x,y)$ であるための必要十分条件は $\langle I_{\mathcal{F}}^{g_{21}}(x), I_{\mathcal{F}}^{g_{21}}(y)\rangle \in \mathcal{F}(P)$。ここで $I_{\mathcal{F}}^{g_{21}}(x) = g_{21}(x) = 1$、$I_{\mathcal{F}}^{g_{21}}(y) = g_{21}(y) = 2$ であり、$\mathcal{F}(P) = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$ から、これは成り立たない。つまり、 $\mathcal{M}, g_{21} \not\models P(x,y)$

ゆえに、g_2 の y 変種である g_{21} に対して $\mathcal{M}, g_{21} \models P(x,y)$ が成り立たないことが分かった。したがって、$\mathcal{M}, g_2 \not\models \forall x P(x,y)$ である。

以上から、g のどの x 変種 g' に対しても $\mathcal{M}, g' \not\models \forall x P(x,y)$ であることが分かった。ゆえに $\mathcal{M}, g \models \exists y \forall x P(x,y)$ は成り立たない。

したがって論理式 $\exists y \forall x P(x,y)$ はモデル $\mathcal{M}$ において偽 (F) である。

ここまでの例では説明をきちんと書いてきた。正直に言えば、これはかなり長い説明になっている。そこで、もう少し簡略化することを考えよう。

真理値を求める式が $\exists x \phi$ という形であるとしよう。これがモデル $\mathcal{M}$ と割り当て関数 g に対して「真」であるための必要十分条件は、定義 3.13(1) から、$M, g' \models \phi$ となるような割当て関数 g の x 変種 g' が存在することである。これは別な見方をすれば、g のいろいろな x 変種の割り当て関数 g' のもとで $M, g' \models \phi$ を調べるよりも、$M, g' \models \phi$ となるような割り当て関数 g' の存在を示すだけでもよい、ということである。

一方、真理値を求める式が $\forall x \phi$ という形であるとしよう。これがモデル $\mathcal{M}$ と割り当て関数 g に対して「真」であるための必要十分条件は、定義 3.13(1) から、割当て関数 g のすべての x 変種 g' に対して $M, g' \models \phi$ が成り立つことである。逆にいえば、割当て関数 g の x 変種 g' で $M, g' \not\models \phi$ となるようなものがあれば、$\forall x \phi$ はモデル $\mathcal{M}$ と割り当て関数 g の元で「偽」である。これはつまり、$M, g' \models \phi$ が成り立たないような g の x 変種 g' が存在することを示せば良い。

この方針にしたがって、先の例の「$\exists y \forall x P(x,y)$ の真理値を求める」説明を書き直してみよう。

$\mathcal{M}$ における $\exists y \forall x P(x,y)$ の真理値を求める:

この式は $\exists y (\forall x P(x,y))$ で表されるような構造をしている。定義 3.13(1) から、どんな割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \exists y \forall x P(x,y)$ であるための必要十分条件は g のある y 変種 g' に対して、$\mathcal{M}, g' \models \forall x P(x,y)$ であること。

ここで $\mathcal{D} = \{1,2\}$ から、$g_1(y) = 1$ かつ $g_2(y) = 2$ であること以外は g_1 と g_2 は g と同じ関数とすると、g の y 変種は g_1 と g_2 の 2 通りしかない。

1. まず、$\mathcal{M}, g_1 \models \forall x P(x,y)$ が成り立つかどうかを調べる。定義 3.13(2) から、これが成り立つための必要十分条件は g_1 の**どの** x **変種** g' **に対しても、** $\mathcal{M}, g' \models P(x,y)$ であること。

   ここで $\mathcal{D} = \{1,2\}$ から、$g_{11}(x) = 1$ かつ $g_{12}(x) = 2$ であること以外は g_{11} と g_{12} は g_1 と同じ関数とすれば、g_1 の x 変種は g_{11} と g_{12} 以外にはない。

   ところで、$I_{\mathcal{F}}^{g_{12}}(x) = g_{12}(x) = 2$、$I_{\mathcal{F}}^{g_{12}}(y) = g_{12}(y) = 1$ であり、$\mathcal{F}(P) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle\}$ から、$\mathcal{M}, g_{12} \models P(x,y)$ は成り立たない。ゆえに、$\mathcal{M}, g_1 \models \forall x P(x,y)$ は成り立たない。
2. 同様に、$\mathcal{M}, g_2 \models \forall x P(x,y)$ も成り立たない。なぜなら、g_2 の x 変種 g_{21}(関数 g_{21} は $g_{21}(x) = 1$ であること以外は g_2 と同じ) に対して $\mathcal{M}, g_{21} \not\models P(x,y)$。

以上から、割り当て関数 g のどの y 変種の関数 g' に対しても $\mathcal{M}, g' \models \forall x P(x,y)$ が成り立たなかったので、$\mathcal{M}, g \models \exists y \forall x P(x,y)$ は成り立たない。したがって、モデル $\mathcal{M}$ において与式の真理値は偽である。

最後に、量化子と論理結合記号を含む論理式の真理値を求める例をあげよう。

例 3.4　$\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ をモデル、定義域 $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ とする。また、a は定項で $\mathcal{F}(a) = 1$ とする。P, Q はそれぞれ 1 項と 2 項の述語記号で、$\mathcal{F}(P) = \{2\}$, $\mathcal{F}(Q) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ とする。

モデル $\mathcal{M}$ における $\forall x(P(x) \to Q(a, x))$ の真理値を求める。

どの割り当て関数 g に対しても $\mathcal{M}, g \models \forall x(P(x) \to Q(a, x))$ が成り立つための必要十分条件は、g のどの x 変種の割り当て関数 g' に対しても $\mathcal{M}, g' \models (P(x) \to Q(a, x))$ が成り立つこと。

ここで、$\mathcal{D} = \{1, 2\}$ であるから、g の x 変種は次のような g_1 と g_2 の 2 通りしかない ($g_1(x) = 1$ かつ $g_2(x) = 2$ であること以外は g_1 と g_2 は g と同じ関数。)

1. $\mathcal{M}, g_1 \models P(x) \to Q(a, x)$ が成り立つかどうかを調べる。
   これが成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_1 \not\models P(x)$、もしくは $\mathcal{M}, g_1 \models Q(a, x)$ が成り立つこと。ここで、$I^{g_1}_{\mathcal{F}}(x) = g_1(x) = 1$、$\mathcal{F}(P) = \{2\}$ より、$\mathcal{M}, g_1 \not\models P(x)$ が成り立つ。ゆえに、$\mathcal{M}, g_1 \models P(x) \to Q(a, x)$ が成り立つ。
2. $\mathcal{M}, g_2 \models P(x) \to Q(a, x)$ が成り立つかどうかを調べる。
   先と同様にこれが成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_2 \not\models P(x)$、もしくは $\mathcal{M}, g_2 \models Q(a, x)$ が成り立つこと。ここで、$I^{g_2}_{\mathcal{F}}(a) = F(a) = 1$、$I^{g_2}_{\mathcal{F}}(x) = g_2(x) = 2$、$\mathcal{F}(Q) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$ より、$\mathcal{M}, g_2 \models Q(a, x)$ が成り立つ。ゆえに、$\mathcal{M}, g_2 \models P(x) \to Q(a, x)$ が成り立つ。

以上により、割り当て関数 g の任意の x 変種の関数 g' に対し、$\mathcal{M}, g \models (P(x) \to Q(a, x))$ が成り立つことが分かった。ゆえに、どのような割り当て関数 g に対しても、$\mathcal{M}, g \models \forall x(P(x) \to Q(a, x))$ が成り立つ。すなわち、モデル $\mathcal{M}$ において $\forall x(P(x) \to Q(a, x))$ の真理値は真。

命題論理と同様に、一階述語論理においても、論理式をそれが取りうる真理値によって分類することができる。以下にそれに関する用語の定義を行なう。

定義 3.15　**充足可能性** (satisfiability)
論理式 A が何らかのモデルに対して真となるとき、A は充足可能 (satisfiable) という。言い換えれば、真となるモデルが存在する論理式を充足可能という。

定義 3.16　**恒真、妥当** (valid)
論理式 A があらゆるモデルに対して真となるとき、A は恒真 (または妥当) という。

以下の概念は、「ある仮定となる論理式から別な論理式が演繹されるといえるのはどういう場合か」を意味論的に定義したものである。命題論理の節で述べた演繹可能性と似ているが、公理系という構文論的な概念によるのではなく、意味論的な概念として定義されていることに注意してほしい。

定義 3.17　**論理的帰結** (logical consequence)
論理式 G が論理式 $F_1, \ldots, F_n$ からの論理的帰結であるための必要十分条件は $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ が真となるあらゆるモデルに対して G も真となることである。

演習 3.3 一階述語論理式の解釈についての演習問題

1. $\mathcal{M}=\langle\mathcal{D},\mathcal{F}\rangle$ をモデル、$\mathcal{D}=\{a,b\}$、$\mathcal{F}(P)=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$ とする。
この時、以下の論理式それぞれに対し、モデル $\mathcal{M}$ における真理値を求めよ。
   (1) $\exists x\exists yP(x,y)$
   (2) $\forall x\forall yP(x,y)$
   (3) $\exists x\forall yP(x,y)$
   (4) $\forall x\exists yP(x,y)$
   (5) $\forall x\forall y(P(x,y)\to P(y,x))$
2. $\mathcal{M}=\langle\mathcal{D},\mathcal{F}\rangle$ をモデルとし、$\mathcal{D}=\{a,b,c,d\}$、$\mathcal{F}(P)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle,$
$\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$ とする。
この時、以下の論理式それぞれに対し、モデル $\mathcal{M}$ における真理値を求めよ。
   (a) $\forall x\exists yP(x,y)$
   (b) $\exists x\forall yP(x,y)$
   (c) $\forall xP(x,x)$
   (d) $\exists y\sim P(a,y)$
   (e) $\forall x\forall y(P(x,y)\to P(y,x))$
3. $\mathcal{M}=\langle\mathcal{D},\mathcal{F}\rangle$ をモデル、$\mathcal{D}=\{a,b,c,d\}$ とする。また、解釈関数 $\mathcal{F}$ を以下のように定める。

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F}(n) & = & \text{d} \\ \mathcal{F}(K) & = & \{\text{ a, b }\} \\ \mathcal{F}(L) & = & \{\ \langle\text{a, a}\rangle,\ \langle\text{a, c}\rangle,\ \langle\text{b,c}\rangle,\ \langle\text{b,d}\rangle,\ \langle\text{c,a}\rangle,\ \langle\text{c,b}\rangle,\ \langle\text{c,c}\rangle,\ \langle\text{c,d}\rangle,\ \langle\text{d,a}\rangle,\ \langle\text{d,c}\rangle\ \} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \mathcal{F}(H) & = & \{\text{ a, b, c, d }\} \\ \mathcal{F}(M) & = & \{\text{ c, d }\} \end{array}$$

この時、以下の論理式それぞれに対し、モデル $\mathcal{M}$ における真理値を求めよ。
   (a) $\forall xM(x),\quad \exists x(M(x)\wedge K(x)),\quad \exists yL(y,n),\quad \exists z(H(z)\wedge M(z))$
   (b) $\forall x\exists yL(x,y),\quad \exists y\forall xL(x,y)$
   (c) $\forall x\exists y(M(y)\wedge L(x,y))$
   (d) $\exists x\forall y(L(x,y)\to K(x))$
   (e) $\exists x(M(x)\wedge\forall yL(x,y))$
4. 次の文を読み、以下の問に答えよ。

   ここには、健と直美と一郎とポチがいる。健と直美と一郎は人間で、ポチは犬である。健と直美はポチを好きだが、一郎はポチを好きではない。ポチはどの人間も好きである。また、健と一郎は直美を好きであり、直美は直美と健が好きである。

   以上で述べられていない関係 (例えば、「ポチがポチを好きかどうか」) については、すべて成り立たないものとして考えよ。また、上の文で現れているものだけがこの世界には存在する、として考えよ。
   また、「人間である」、「犬である」に対応する述語をそれぞれ一項述語 Man、Dog で表わすとする。また、「x が y を好き」に対応する述語を二項述語 $Like(x,y)$ で表わすとする。
   (a) 上の文が表わす状況に対応するモデルを $\mathcal{M}=\langle\mathcal{D},\mathcal{F}\rangle$ とする。このモデルの定義域 $\mathcal{D}$ を答えよ。ただし、個体を表すのに「固有名」を用い、個体の集合を答えよ。
   (b) モデル $\mathcal{M}$ の解釈関数を $\mathcal{F}$ とする。$\mathcal{F}(Man)$ を答えよ。
   (c) $\mathcal{F}(Dog)$ を答えよ。

(d)　$\mathcal{F}(Like)$ を答えよ。

(e)　モデル $\mathcal{M}$ において、$\forall x(Man(x) \to \exists y Like(y,x))$ の真理値を求めよ。ただし求める過程も示せ。

(f)　モデル $\mathcal{M}$ において、$\exists x(Man(x) \land \forall y Like(y,x))$ の真理値を求めよ。ただし求める過程も示せ。

3.2.2　論理式のモデル—論理式が真となるようなモデルを求める

前節では、モデルが与えられたときに、論理式がどのような真理値を取るかを論じた。これは、言葉によるコミュニケーションに例えると、「どのような状況について語っているかは既知として、提示された文の真偽を確かめる」ことに相当する。その具体的な例としては口頭試問が考えられるだろう。試験者は受験者に質問を提示し、その質問の真偽を答えさせる、というようなものである。

それに対して、「対象としている状況では何が起きているか、何が真実か分からないものとして、そこで成り立つ事実を述べることにより、その状況についての断片的な知識を増やしていく、もしくは状況を特定化していく」というコミュニケーションが考えられる。これは我々が一般的に行っている会話に相当する。言い換えれば、ある状況で成り立つ (真である) 論理式を提示することにより、その状況を特定化する (その状況についての情報を増やす)。「論理式のモデルを求めること」はまさにこの操作に相当する。

定義 3.18　論理式のモデル
論理式 ϕ に対して、ϕ が真理値として真をもつようなモデル $\mathcal{M}$ を、「論理式 ϕ のモデル」という。

ここで、モデルに関する定義を復習しておこう。

定義域　: 考えている世界に存在するモノの集合。普通 $\mathcal{D}$ で表わされる。

関係　: n 項関係は、n 個のモノの間の関係を表わす。定義域の n 項組を要素とする集合で表現— 定義域の n 項組の集合の部分集合になる。

解釈関数　: 個体定項に対しては定義域 $\mathcal{D}$ の要素を割当て、「n 項関係」に対しては、定義域 $\mathcal{D}$ の n 項組の集合を割当てるような関数。普通 $\mathcal{F}$ で表わされる。

以下では、例を用いて、モデルを求める考え方を学ぶ。

求めるモデルを $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ とする。ただし、定義域 (モデルに存在する個体の集合) が未定義なままだと大変なので[*6]、ここでは $\mathcal{D} = \{a,b,c\}$ とする。また k,m,n を個体定項とし、$\mathcal{F}(k) = a$、$\mathcal{F}(m) = b$、$\mathcal{F}(n) = c$ としておく。

例 3.5　P を 1 項述語とする。$P(k) \land P(m) \land \sim P(n)$ のモデルを求める。

求めるモデル $\mathcal{M}$ は、どの割当て関数 g に対しても、定義 3.12(3) から、$\mathcal{M}, g \models P(k)$、かつ $\mathcal{M}, g \models P(m)$、かつ $\mathcal{M}, g \not\models P(n)$ となるものであればよい。

ここで、$\mathcal{F}(k) = a$ と $\mathcal{M}, g \models P(k)$ とから、$a \in \mathcal{F}(P)$ が求められる。同様にし

[*6] 定義域は個体の集合であるが、要素数には制限がない。一般に要素数が多ければ多いほど、モデルを求めるのは難しくなる。

て、$b \in \mathcal{F}(P)$、$c \notin \mathcal{F}(P)$ が求められる。
(ここで、$\mathcal{F}(P) \subseteq D$ であることを考慮して) これらから $\mathcal{F}(P) = \{a, b\}$ が求まる。
これが $P(k) \land P(m) \land \sim P(n)$ のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ の必要十分条件である。

例 3.6　Q を 1 項述語とする。$Q(k) \land (Q(m) \to Q(n))$ のモデルを求める。

求めるモデル $\mathcal{M}$ は、どの割当て関数 g に対しても、定義 3.12(3) から、$\mathcal{M}, g \models Q(k)$、かつ $\mathcal{M}, g \models (Q(m) \to Q(n))$ となるものであればよい。
$\mathcal{M}, g \models Q(k)$ が成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{F}(k) = a$ から $a \in \mathcal{F}(Q)$ ...(1)
また $\mathcal{M}, g \models (Q(m) \to Q(n))$ が成り立つための必要十分条件は、定義 3.12(5) から、$\mathcal{M}, g \not\models Q(m)$、もしくは $\mathcal{M}, g \models Q(n)$ が成り立つことである。
ここで、$\mathcal{M}, g \not\models Q(m)$ が成り立つための必要十分条件は $\mathcal{F}(m) = b$ から $b \notin \mathcal{F}(Q)$、$\mathcal{M} \models Q(n)$ が成り立つための必要十分条件は $\mathcal{F}(n) = c$ から $c \in \mathcal{F}(Q)$ (2)
以上により、$Q(k) \land (Q(m) \to Q(n))$ のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ の必要十分条件は、(1) $a \in \mathcal{F}(Q)$ かつ、(2) $b \notin \mathcal{F}(Q)$ または $c \in \mathcal{F}(Q)$ である*7。

例 3.7　W を 1 項述語とする。$\exists x W(x)$ のモデルを求める。

求めるモデル $\mathcal{M}$ は、どのような割り当て関数 g に対しても、定義 3.13(1) から、その x 変種の関数 g' の中に $\mathcal{M}, g' \models W(x)$ が成り立つようなものがあるものである。このままだと扱いが厄介なので、「適当な g があるものとして分析を進める」。
$\mathcal{D} = \{a, b, c\}$ であることから、g の x 変種は 3 通りに限定される。それぞれ g_1、g_2、g_3 とする。そして $g_1(x) = a$、$g_2(x) = b$、$g_3(x) = c$ であり、x 以外の引数には g と同じ値を返すものとする。
これらを用いて言換えると、求めるモデル $\mathcal{M}$ は、(1) $\mathcal{M}, g_1 \models W(x)$、もしくは (2) $\mathcal{M}, g_2 \models W(x)$、もしくは (3) $\mathcal{M}, g_3 \models W(x)$、が成り立つものであればよい。
(1) からは $g_1(x) \in \mathcal{F}(W)$ が導け、これから $a \in \mathcal{F}(W)$ が求まる。同様に (2) と (3) からそれぞれ $b \in \mathcal{F}(W)$ と $c \in \mathcal{F}(W)$ が求まる。
ゆえに、$\exists x W(x)$ のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ の必要十分条件は、$a \in \mathcal{F}(W)$、または $b \in \mathcal{F}(W)$、または $c \in \mathcal{F}(W)$ であることとなる*8。

例 3.8　R を 2 項述語とする。$\forall x R(x, x)$ のモデルを求める。

求めるモデル $\mathcal{M}$ は、定義 3.13(2) から、どのような割り当て関数 g に対しても、その x 変種の関数 g' すべてにおいて $\mathcal{M}, g' \models R(x, x)$ が成り立つことである。
$\mathcal{D} = \{a, b, c\}$ であることから、g の x 変種は 3 通りに限定される。それぞれ g_1、g_2、g_3 とする。そして、$g_1(x) = a$、$g_2(x) = b$、$g_3(x) = c$ であり、x 以外の引数には g と同じ値を返すものとする。
これらを用いて言換えれば、(1) $\mathcal{M}, g_1 \models R(x, x)$、かつ (2) $\mathcal{M}, g_2 \models R(x, x)$、かつ (3) $\mathcal{M}, g_3 \models R(x, x)$ であることが、求めるモデル $\mathcal{M}$ の必要十分条件となる。
(1) から $\langle g_1(x), g_1(x) \rangle \in \mathcal{F}(R)$、すなわち $\langle a, a \rangle \in \mathcal{F}(R)$ が導ける。同様に (2) と (3) から $\langle b, b \rangle \in \mathcal{F}(R)$、$\langle c, c \rangle \in \mathcal{F}(R)$ が導ける。

*7 この条件はいろいろな書き方が可能である。例えば「$\{a, b\} \cap \mathcal{F}(Q) = \{a\}$ または $\{a, c\} \subseteq \mathcal{F}(Q)$」。
*8 $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$ であることを考慮すると、求める条件は $\mathcal{D} \cap \mathcal{F}(W) \neq \{\}$ とも書ける。

以上から、$\forall x R(x,x)$ のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ の必要十分条件は、$\{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\} \subseteq \mathcal{F}(R)$ であることとなる。

例 3.9　P、Q を 1 項述語とする。$\forall x(P(x) \to Q(x))$ のモデルを求める。

求めるモデル $\mathcal{M}$ は、定義 3.13(2) から、どのような割り当て関数 g に対しても、その x 変種の関数 g' すべてにおいて $\mathcal{M}, g' \models (P(x) \to Q(x))$ が成り立つことである。
$D = \{a,b,c\}$ であることから、g の x 変種は 3 通りに限定される。それぞれ g_1、g_2、g_3 とする。そして $g_1(x) = a$、$g_2(x) = b$、$g_3(x) = c$ であり、x 以外の引数には g と同じ値を返すものとする。
これらを用いて言換えれば、(1) $\mathcal{M}, g_1 \models P(x) \to Q(x)$、(2) $\mathcal{M}, g_2 \models P(x) \to Q(x)$、(3) $\mathcal{M}, g_3 \models P(x) \to Q(x)$ の三つが成り立つことが、求めるモデル $\mathcal{M}$ の必要十分条件となる。
(1) は、$\mathcal{M}, g_1 \not\models P(x)$ もしくは $\mathcal{M}, g_1 \models Q(x)$ が成り立つことが必要十分条件となる。これは、すなわち $g_1(x) \notin \mathcal{F}(P)$、または $g_1(x) \in \mathcal{F}(Q)$ を意味する。すなわち、$a \notin \mathcal{F}(P)$ または $a \in \mathcal{F}(Q)$ が導ける。
同様に (2) から $b \notin \mathcal{F}(P)$ または $b \in \mathcal{F}(Q)$ が、(3) から $c \notin \mathcal{F}(P)$ または $c \in \mathcal{F}(Q)$ が導ける。
調べてみれば、これを満たすモデルは、$\mathcal{F}(P) = \mathcal{F}(Q) = \{\}$ や $\mathcal{F}(P) = \mathcal{F}(Q) = D$ など、実に 27 通りあることが分かる。したがって、$\forall x(P(x) \to Q(x))$ のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ を一つ求めるのであれば、例えば「$\mathcal{F}(P) = \mathcal{F}(Q) = \{\}$ であるようなモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$」と答えればよい。
ここでは、モデル「すべて」をなるべく少ない条件によって表すことを考えてみよう。
最初の条件は、$a \in \mathcal{F}(P)$ ならば $a \in \mathcal{F}(Q)$ であり、$a \notin \mathcal{F}(P)$ ならば $\mathcal{F}(Q)$ は a を要素としてもいいし、要素としなくてもよいことを示している。つまり、$\mathcal{F}(P)$ の値を a に関して見れば、a を全く含まない $\mathcal{F}(P) = \{\ \}$ ならば、$\mathcal{F}(Q)$ は $\{\ \}$ でも $\{a\}$ でも、$\{b\}$、$\cdots$ $\{a,b,c\}$ でもよい。$\mathcal{F}(P)$ が a を含む、例えば $\mathcal{F}(P) = \{a\}$ ならば $\mathcal{F}(Q)$ は $\{a\}$ か $\{a,b\}$ か $\{a,b,c\}$ というように、$\mathcal{F}(P)$ の要素を含む集合でなければばならない。従って、$\mathcal{F}(P)$ の値を a に関して見る限り、$\mathcal{F}(P) \subseteq \mathcal{F}(Q) (\subseteq D)$ と考えられる。
これは (2) の条件でも (3) の条件でも同じ。以上から、$\forall x(P(x) \to Q(x))$ のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ の必要十分条件は、$\mathcal{F}(P) \subseteq \mathcal{F}(Q) \subseteq D$ となる。

例 3.10　P を一項述語、Q を二項述語とする (例えば、P(x) を「x は人間である」、Q(x,y) を「x は y を持っている」を表す述語と考えよ)。定義域を $\mathcal{D} = \{a,b,c\}$ とする。

(A)　$\forall x \exists y(P(x) \to Q(x,y))$ のモデル。
求めるモデル $\mathcal{M}$ は、定義 3.13(2) から、どのような割り当て関数 g に対しても、その x 変種の関数 g' すべてにおいて $\mathcal{M}, g' \models \exists y(P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つことである。
$\mathcal{D} = \{a,b,c\}$ であることから、g の x 変種は 3 通りに限定される。それぞれ g_1、g_2、g_3 とする。そして $g_1(x) = a$、$g_2(x) = b$、$g_3(x) = c$ とし、x 以外の引数には g

と同じ値を返すものとする。

これらを用いて言い換えれば、(1) $\mathcal{M}, g_1 \models \exists y(P(x) \to Q(x,y))$、かつ (2) $\mathcal{M}, g_2 \models \exists y(P(x) \to Q(x,y))$、かつ (3) $\mathcal{M}, g_3 \models \exists y(P(x) \to Q(x,y))$ であることが、求めるモデル $\mathcal{M}$ の必要十分条件となる。

それぞれの場合を検討する。

(1) $\mathcal{M}, g_1 \models \exists y(P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つための必要十分条件は、定義 3.13(1) から、g_1 の y 変種のある関数 g' に対して $\mathcal{M}, g' \models (P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つことである。

$\mathcal{D} = \{a,b,c\}$ であることから g_1 の y 変種は 3 通りに限定される。それぞれ g_{11}、g_{12}、g_{13} とする。そして $g_{11}(y) = a$、$g_{12}(y) = b$、$g_{13}(y) = c$ であり、y 以外の引数には g_1 と同じ値を返すものとする (ここで $g_1(x) = a$ であることに注意)。

ここで g_{11} がこの条件を満たす、つまり $\mathcal{M}, g_{11} \models (P(x) \to Q(x,y))$ であるとすれば、その必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_{11} \not\models P(x)$ もしくは $\mathcal{M}, g_{11} \models Q(x,y)$。ゆえに、$a \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle a,a \rangle \in \mathcal{F}(Q)$。

g_{12} がこの条件を満たすとすれば、同様に、$a \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle a,b \rangle \in \mathcal{F}(Q)$。また g_{13} がこの条件を満たすとすれば、$a \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle a,c \rangle \in \mathcal{F}(Q)$ である。

これらをまとめていえば、$a \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\{\langle a,a \rangle, \langle a,b \rangle, \langle a,c \rangle\} \cap \mathcal{F}(Q) \neq \{\}$。

(2) $\mathcal{M}, g_2 \models \exists y(P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つための必要十分条件は、定義 3.13(1) から、g_2 の y 変種のある関数 g' に対して $\mathcal{M}, g' \models (P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つことである。

(1) と同様に、そのための必要十分条件は、$b \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\{\langle b,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle b,c \rangle\} \cap \mathcal{F}(Q) \neq \{\}$。

(3) $\mathcal{M}, g_3 \models \exists y(P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つための必要十分条件は、定義 3.13(1) から、g_3 の y 変種のある関数 g' に対して $\mathcal{M}, g' \models (P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つことである。

(1) と同様に、そのための必要十分条件は、$c \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\{\langle c,a \rangle, \langle c,b \rangle, \langle c,c \rangle\} \cap \mathcal{F}(Q) \neq \{\}$。

以上から、(A) のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ は、(1)、(2)、(3) の**すべて**を満たすものであればよい。例えば、$\mathcal{F}(P) = \{\}$ ($\mathcal{F}(Q)$ は任意) は答えの一つであり、$\mathcal{F}(P) = \{a\}$ かつ $\mathcal{F}(Q) = \{\langle a,b \rangle\}$ も、$\mathcal{F}(P) = \{a,b,c\}$ かつ $\mathcal{F}(Q) = \{\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,a \rangle\}$ も解である。

なお、$\mathcal{F}(P) = \{a,b,c\}$ かつ $\mathcal{F}(Q) = \{\langle b,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,a \rangle, \langle c,b \rangle, \langle c,c \rangle\}$ は解ではない。

(B) $\exists y \forall x(P(x) \to Q(x,y))$ のモデル。

求めるモデル $\mathcal{M}$ は、定義 3.13(1) から、どのような割り当て関数 g に対しても、その y 変種のある関数 g' において $\mathcal{M}, g' \models \forall x(P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つことである。

$\mathcal{D} = \{a,b,c\}$ であることから g の y 変種は 3 通りに限定される。それぞれ g_1、g_2、g_3 とする。そして $g_1(y) = a$、$g_2(y) = b$、$g_3(y) = c$ であり、y 以外の引数には g

と同じ値を返すものとする。

これらを用いて言い換えれば、(1) $\mathcal{M}, g_1 \models \forall x(P(x) \to Q(x,y))$、または (2) $\mathcal{M}, g_2 \models \forall x(P(x) \to Q(x,y))$、または (3) $\mathcal{M}, g_3 \models \forall x(P(x) \to Q(x,y))$ であることが、求めるモデル $\mathcal{M}$ の必要十分条件となる。

それぞれの場合を検討する。

(1) $\mathcal{M}, g_1 \models \forall x(P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つための必要十分条件は、定義 3.13(2) から、g_1 の x 変種のどの関数 g' に対しても $\mathcal{M}, g' \models (P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つことである。

$\mathcal{D} = \{a,b,c\}$ であることから g_1 の x 変種は 3 通りに限定される。それぞれ g_{11}、g_{12}、g_{13} とする。そして $g_{11}(x) = a$、$g_{12}(x) = b$、$g_{13}(x) = c$ であり、x 以外の引数には g_1 と同じ値を返すものとする (ここで $g_1(y) = a$ であることに注意)。

ここで g_{11} がこの条件を満たす、つまり $\mathcal{M}, g_{11} \models (P(x) \to Q(x,y))$ であるための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_{11} \not\models P(x)$ もしくは $\mathcal{M}, g_{11} \models Q(x,y)$。ゆえに、$a \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle a,a \rangle \in \mathcal{F}(Q)$。

g_{12} がこの条件を満たすとすれば、同様に、$b \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle b,a \rangle \in \mathcal{F}(Q)$。また g_{13} がこの条件を満たすとすれば、$c \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle c,a \rangle \in \mathcal{F}(Q)$ である。

(2) $\mathcal{M}, g_2 \models \forall x(P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つための必要十分条件は、定義 3.13(2) から、g_2 の x 変種のどの関数 g' に対しても $\mathcal{M}, g' \models (P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つことである。

(1) と同様に、そのための必要十分条件は、$a \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle a,b \rangle \in \mathcal{F}(Q)$、かつ $b \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle b,b \rangle \in \mathcal{F}(Q)$、かつ $c \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle c,b \rangle \in \mathcal{F}(Q)$ である。

(3) $\mathcal{M}, g_3 \models \forall x(P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つための必要十分条件は、定義 3.13(2) から、g_3 の x 変種のどの関数 g' に対しても $\mathcal{M}, g' \models (P(x) \to Q(x,y))$ が成り立つことである。

(1) と同様に、そのための必要十分条件は、$a \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle a,c \rangle \in \mathcal{F}(Q)$、かつ $b \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle b,c \rangle \in \mathcal{F}(Q)$、かつ $c \notin \mathcal{F}(P)$ もしくは $\langle c,c \rangle \in \mathcal{F}(Q)$ である。

以上から、(A) のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ は、(1)、(2)、(3) の**いずれか**を満たすものであればよい。一つのまとめ方をすれば、「$\mathcal{F}(P) = \{\}$ ($\mathcal{F}(Q)$ は任意の集合)、または $\mathcal{F}(P)$ のどの要素 z に対しても $\langle z, \alpha \rangle \in \mathcal{F}(Q)$ なる α が存在すること」が必要十分条件である。

例えば、$\mathcal{F}(P) = \{\}$ ($\mathcal{F}(Q)$ は任意) は答えの一つであり、$\mathcal{F}(P) = \{a\}$ かつ $\mathcal{F}(Q) = \{\langle a,b \rangle\}$ も解である。しかし、$\mathcal{F}(P) = \{a,b,c\}$ かつ $\mathcal{F}(Q) = \{\langle a,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,a \rangle\}$ は解ではない。

なお、$\mathcal{F}(P) = \{a,b,c\}$ かつ $\mathcal{F}(Q) = \{\langle b,a \rangle, \langle b,b \rangle, \langle b,c \rangle, \langle c,a \rangle, \langle c,b \rangle, \langle c,c \rangle\}$ も解ではない。

参考:　調べて見ればわかるが、(B) のモデルは必ず (A) のモデルでもあるが、その逆は成り立たない。

(A) が真となるモデルでは、定義域 $\mathcal{D}$ 中のどの要素 (仮に x とする) に対しても、$P(x) \to Q(x,y)$ が真となるような要素 (仮に y とする) がある場合である。つまり $P(x)$ が偽であるか、$P(x)$ が真の場合は $Q(x,y)$ を真とするような y が (それぞれの x に対して) 存在するようなモデルが (A) のモデルである。

しかるに (B) が真となるモデルでは、定義域中にある要素 (仮に α とする) があって、定義域中のどの要素 (仮に x とする) に対しても $P(x) \to Q(x,\alpha)$ が真とならなくてはならない。つまり、$P(x)$ が偽であるか、または $P(x)$ が真の場合は $Q(x,\alpha)$ も真となるようなモデルである。

したがって、(B) が真となるモデルは、(A) が真となるモデルの特殊な場合であると考えられる。つまり $P(x)$ が真の場合には $Q(x,y)$ を真とするような要素 y が x に応じて存在するか ((A) の場合)、それとも x によらず特定の要素 (α) が存在するのか ((B) の場合)、の違いである。

演習 3.4　一階述語論理式のモデルに関する演習問題

1. 定義域 $\mathcal{D} = \{a,b\}$ としたとき、以下にあげるそれぞれの論理式に対するモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ を求めよ。
   (a) $\forall x(P(x) \land Q(x))$
   (b) $\forall x(P(x) \to Q(x))$
   (c) $\exists x(P(x) \land Q(x))$
   (d) $\exists x(P(x) \to Q(x))$
2. 定義域を $\mathcal{D} = \{a,b,c\}$、m,n を個体定項とし、$\mathcal{F}(m) = b$、$\mathcal{F}(n) = c$ とする。 以下の論理式のモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ を求めよ。ただし、それを求める考え方も記せ。
$$\sim P(m) \land \sim P(n) \land \exists x(P(x) \land \forall y Q(x,y))$$
3. P, Q を一項述語とする（例えば、P を「犬である」、Q を「動物である」を表す述語と考えよ)。このとき、定義域を $\mathcal{D} = \{a,b\}$ として、以下の論理式に対するモデルを作れ。また、それがこの論理式のモデルであることの説明もせよ。
$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \land \exists y P(y) \land \exists z(\sim Q(z))$$
4. 定義域 $\mathcal{D}$ を集合 $\{a,b\}$ とする。以下の論理式を真とするモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ を求めよ。また求めたモデルが条件を満たしていることの説明も行え。
$$P(a) \land \{\exists x(\sim P(x) \land \forall y \sim Q(x,y))\} \land \{\exists x(P(x) \land \forall y Q(x,y))\}$$

3.3　日本語と論理式

重要語: 日本語と論理式の関係、固有名詞、普通名詞、動詞、接続詞、限量詞

この節では日本語と論理式との対応を考える。

命題論理では、「文」と命題変項との対応があった。では、述語論理ではどうであろうか？

以下に述語論理の構文論における概念と日本語の文法用語のおおまかな対応を示そう。

個体定項	$\leftrightarrow$	固有名詞
述語	$\leftrightarrow$	動詞、形容詞、形容動詞。時には普通名詞
論理結合記号 ($\sim$)	$\leftrightarrow$	否定辞 (〜ない)
論理結合記号 ($\wedge$)	$\leftrightarrow$	接続詞 (かつ、そして)
論理結合記号 ($\vee$)	$\leftrightarrow$	接続詞 (または)
論理結合記号 ($\rightarrow$)	$\leftrightarrow$	接続詞 (ならば)
量化記号 ($\forall$)	$\leftrightarrow$	限量詞 (あらゆる、すべての)
量化記号 ($\exists$)	$\leftrightarrow$	限量詞 (ある)

これはあくまでも目安であるということに注意して欲しい。どの量化記号を選ぶかは一般に難しいいし、また、論理結合記号 ($\rightarrow$) が日本語の「ならば」に対応するとは限らない、という命題論理と同じ問題を抱えている事に注意。

- 太郎が花子を好きだ。
  ここには「太郎」と「花子」という固有名詞と、「好きだ」という形容動詞が用いられていることに注意する。「太郎」に対し個体定項 a、「花子」に対し個体定項 b、「(x が y を) 好きだ」に対し二項述語 $P(x,y)$ を対応させると、$P(a,b)$ と表される。
- 太郎が花子を好きならば、花子は太郎を好きだ。
  上と同様に、「太郎」、「花子」という固有名詞と「好きだ」という述語が現れていることに注意して、「太郎」「花子」それぞれに対し個体定項 a,b を、また「(x が y を) 好きだ」に二項述語 $P(x,y)$ を対応させる。すると、前半の「太郎が花子を好きだ」は $P(a,b)$、後半の「花子が太郎を好きだ」は $P(b,a)$ と表される。また、これらは「ならば」で接続されているから、論理結合記号 $\rightarrow$ を用いて、$P(a,b) \rightarrow P(b,a)$ となる。
- 太郎は花子を好きだが、花子は次郎を好きだ。
  「太郎」,「花子」,「次郎」それぞれに対し個体定項 a,b, c を、また「(x が y を) 好きだ」に二項述語 $P(x,y)$ を対応させる。すると、前半の「太郎が花子を好きだ」は $P(a,b)$、後半の「花子が次郎を好きだ」は $P(b,c)$ と表される。これらは接続助詞「が」で連結されている。「が」は「逆接」接続詞と国文法でいわれている。「逆接」とは、(一見) 矛盾するような事柄がともに成り立つ、ということを表わす。論理的にみれば、これは「連言」を表わし、「そして」「かつ」と同じ扱いになる。ゆえに、論理結合記号 $\wedge$ を用いて、$P(a,b) \wedge P(b,c)$ と表わされる。
- どの人も花子が好きだ。
  ここには、「どの」という限量詞、「人」という普通名詞、「花子」という固有名詞、「好きだ」という形容動詞が現れていることに注意して、「人」には一項述語 $Q(\cdot)$、「花子」には個体定項 b、「(x が y を) 好きだ」には二項述語 $P(x,y)$ を対応させる。具体的にこの文を論理式で表すには、いくつかの考え方がある。基本は、日本語の意味をよく考える、ということである。
  「どの人も」ということは「定義域中のどの要素 x もそれが人であれば」を意味する (人でないものが定義域中にあることがあることを考えてみよう)。従って、「どの人も花子が好きだ」は「定義域中のどの要素 x もそれが人であれば、x は花子が好きだ」を意味するから、

$$(\forall x)(Q(x) \rightarrow P(x,b))$$

- 花子には好きな人がいる。
  これも日本語の意味をよく考える。「花子には好きな人がいる」ということは、「定義域中には、花子が好きななにかであって、しかもそれは人であるようなものがある」を意味する。そこで、そのようなものを x とすると、「花子の好きな人」は「花子が好きで、しかも人である」に対応するので、$P(b,x) \wedge Q(x)$ と表される。従って、それが定義域中に存在するのであるから、

$$(\exists x)(P(b,x) \wedge Q(x))$$

- 太郎は犬を飼っている。
  この文には「犬」という普通名詞、「太郎」という固有名詞、「飼っている」という動詞が現れていることに注意して、「犬」には一項述語 $D(\cdot)$、「太郎」には個体定項 a、「(x が y を) 飼っている」には二項述語 $H(x,y)$ を対応させよう。
  一階述語論理に慣れないうちは、$H(a,D)$ とか $\exists x H(a,D(x))$ とか書いてしまうことがあるが、**これらは論理式として認められない**ものである。一階述語論理という名称の「一階」とは、述語 (や関数) の引数である**「項」として個体定項か個体変項だけしか書けない**という意味である。いまの誤った例のように、述語の引数の中に述語を書くことはできないのである (いまの例では D の場所が悪い)。
  この例では、「ある犬 (x) がいて、太郎は x を飼っている」と読み替える。すると、$\exists x(D(x) \wedge H(a,x))$ が導ける。
- どの人にも好きな人がいる。
  ϕ を「好きな人がいる」とすると、これは「どの人も ϕ だ」と言い替えられる。従って、「どの人も花子を好きだ」と同じように、「定義域中のどの要素も、それが人なら ϕ だ」と言い替えられるので、

$$(\forall x)(Q(x) \to \phi)$$

  と表される。ここで ϕ の部分を考えてみると、「今考えている定義域中の要素 x が好きな人がいる」に対応する。これは今度は「花子には好きな人がいる」と同じように、

$$(\exists y)(P(x,y) \wedge Q(y))$$

  で表されるから、これらの結果から、

$$\forall x(Q(x) \to \exists y(P(x,y) \wedge Q(y)))$$

- どの人からも愛されている人がいる。
  これには、「愛されている」という受動態の述語が含まれている。ここで、「y が x に愛されている」という述語に対応する述語 (仮に $R(y,x)$ とする) を導入してもよいが、よく考えると、「y が x に愛されている」は「x が y を好きである」とほぼ同じ意味であるので、いままでの例にでてきた P を使って、$P(x,y)$ と表わされる。つまり、ここでは $P(x,y)$ によって「y が x に愛されている」を表すとする。また、$Q(x)$ により「x が人である」を表わすとする。
  ところで、この文は、ψ を「愛されている人がいる」として、「どの人からも ψ」と言い替えられるだろうか？

実は、この文は、「どの人からも ψ」という構造を持つのではなく、「(どの人からも愛されている) 人がいる」という構造であると考えなければならない (なぜだろうか？)。従って、「どの人からも愛されている」を α とすると、この文は「(α である人) がいる」と言い替えられる。従って、

$$(\exists y)(Q(y) \wedge \alpha)$$

と表される。また、「(y は) どの人からも愛されている」は「どの人も (y を) 好きである」と言い替えられるから、

$$(\forall x)(Q(x) \rightarrow P(x, y))$$

従って、両方の式をあわせて、

$$\exists y(Q(y) \wedge \forall x(Q(x) \rightarrow P(x, y)))$$

- 月に人は住んでいない。
  ここには固有名詞「月」、普通名詞「人」、そして動詞「(x が y に) 住む」が用いられている。それぞれに対して固有定項 c、一項述語 $Q(\cdot)$、二項述語 $R(x, y)$ で表すとする。
  「月に人は住んでいない」は、(a)「どの人も月には住んでいない」、もしくは (b)「月に住む人はいない」と言い替えられる。
  (a) からは、「月に住んでいない」を β で表すと、「どの人も β」と言い替えられるので、$(\forall x)(Q(x) \rightarrow \beta)$ と表せる。また、β は $\sim R(x, c)$ と表せるから、

$$(\forall x)(Q(x) \rightarrow \sim R(x, c))$$

  (b) からは、「月に住む」を γ で表すと、「γ である人はいない」と言い替えられる。そこで、$\sim (\exists x(\gamma \wedge Q(x)))$ と表せる。従って、

$$\sim \exists x(Q(x) \wedge R(x, c))$$

  問題。(a) と (b) が同値であることを示せ。

演習 3.5　日本語と論理式の演習問題

1. $P(x)$ と $Q(x)$ をそれぞれ「x は有理数」、「x は実数」とする。次の文を一階述語論理式に直せ。
   (a)　どの有理数も実数である。
   (b)　ある実数は有理数である。
   (c)　どの実数も有理数とは限らない。
2. 以下の文を一階述語論理式に翻訳せよ。ただし、以下の述語を用いよ。
   - $Male(x)$ — x は男性である。
   - $Female(x)$ — x は女性である。
   - $Vegetarian(x)$ — x は菜食主義者である。
   - $Butcher(x)$ — x は肉屋である。
   - $Like(x, y)$ — x は y を好きである。

   (a)　肉屋でありかつ菜食主義者であるような男性は (一人も) いない。

(b) 肉屋でない男性はみな、どの菜食主義者も好きである。
(c) 菜食主義の肉屋は女性だけである。
(d) 菜食主義の女性を好きな男性はいない。(どの男性も、菜食主義の女性はみな好きではない、という意味で)
(e) どの菜食主義者も好きとは限らないような男性を好む女性は (一人も) いない。(女性に好かれる男性は、みな、どの菜食主義者も好きである、という意味で)

3. 以下の文を一階述語論理式で表せ。ただし、一項述語 $H(x)$ を「x は人である」、$D(x)$ を「x は犬である」、二項述語 $H(x,y)$ を「x は y を飼っている」、$L(x,y)$ を「x は y が好きである」を表すとする。
(a) どの人も犬を飼っており、かつ、その犬に好かれている。
(b) どの犬からも好かれていない人がいるが、その人は犬を飼っている。
(c) 犬を好きでない人は、どの犬にも好かれない。

4. 以下の文を対応する一階述語論理式で表せ。ただし、C(x) を「x はクラスである」、S(x) を「x は学生である」、K(x) を「x は親切である」、B(x,y) を「x は y にいる (属す)」、L(x,y) を「x は y を好きである」、を表す述語とする。

どのクラスにも親切な学生が居り、そのような学生はすべての学生に好かれている。

5. 以下の文を対応する一階述語論理式で表せ。ただし、K(x) を「x は親切である」、M(x) を「x は男性である」、F(x) を「x は女性である」、L(x,y) を「x は y に好かれている」、を表す述語とする。
(a) 親切な女性は誰からも好かれている。
(b) 親切でない男性を好きな女性はいない。
(c) ある女性を好きな, 親切な男性がいる。

3.3.1 等号 (=) をもつ論理への拡張

これまでの一階述語論理の定義に現れなかった等号 (=) をもつよう一階述語論理を拡張することを考える。それにはいくつかの定義の修正が必要である。

定義 3.3: (一階述語論理の) 基本論理式

$t_1, \ldots, t_n$ が項であり P が n 引数の述語記号の時、$P(t_1, \ldots, t_n)$、および $t_1 = t_2$ は**基本論理式**である。

定義 3.12: 述語論理式の解釈 (真理値の決定)

- 基本論理式 $\tau_1 = \tau_2$ に対し、$\mathcal{M}, g \models \tau_1 = \tau_2$ であるための必要十分条件は、
  $I^g_{\mathcal{F}}(\tau_1) = I^g_{\mathcal{F}}(\tau_2)$

等号を用いないと、論理式に変換できない「日本語文」がある。例えば、「**どの人にも母国があり、しかもそれはただ一つに限られる**」がそれである。これはどのように論理式として表現されるかを考えよう。

ここでは、普通名詞「人」に一項述語 $Q(\cdot)$ を、また「(x は y の) 母国」に二項述語 $M(x,y)$ を対応させて考える。

まず、「どの人にも母国がある」は、いままで見てきたように、「どの人にも δ」である、というパタンであることに注意すれば、$(\forall x)(Q(x) \to \delta)$ で表される事が分かる。また、δ は「母国がある」であるから、$(\exists y)M(y,x)$ で表される。従って、

$$\forall x(Q(x) \to (\exists y M(y,x)))$$

すなわち、

(a) $\forall x \exists y(Q(x) \to M(y,x))$

次に、「しかもそれはただ一つに限られる」を考えてみよう。何が「ただ一つ」か、というと、「それぞれの人の母国」、つまり「人がそれぞれ持っている母国」である。問題文の前半で、「人 (x) はそれぞれの母国 (y) がある」と言っているのだから、ここでは、「母国は二つはない」もしくは、「それぞれの人に対し母国関係にたてるものが y 以外に w も考えられたとすると、実は y と w は同じものでなければならない」というように言い替える (この言い替えを発見するのは難しいが、一旦これを覚えてしまえば、応用はさほど難しくないだろう)。すると、「人 (x) の母国の候補 (w) すべてに対して $w = y$ でなければならない」ことを表せばよいことが分かる。従って、

(b) $(\forall w)(M(w,x) \to w = y)$

残された問題は、(a) 式と (b) 式をどのように組み合わせるか、である。(b) 式では、(a) 式で導入された x と y が使われている事から、(a) 式に埋め込まれていなければならないことが分かる。(もしくは、「どの人も、ただ一つの母国を持っている」と考えればよい。)

従って、

$$\forall x \exists y(Q(x) \to (M(y,x) \land (\forall w(M(w,x) \to w = y))))$$

演習 3.6 $P(x)$、$L(x)$、$R(x,y,z)$ をそれぞれ「x は点」、「x は直線」、「z は x と y を通る」とする。次の文を等号をもつ一階述語論理で表せ。

> どの異なる二つの点に対しても、それらを通る直線が一つ、そしてただ一つ存在する。

3.4 推論への応用

ここで、今までの知識を用いて、一階述語論理において推論を「証明する」方法を示そう。

例 3.11 **人は死ぬ、ソクラテスは** ...

A1: $\forall x(man(x) \to mortal(x))$

A2: $man(Socrates)$

A1 は「人は死すべきものである」、A2 は「ソクラテスは人である」を表しているとする。ここで、この二つを仮定すれば「ソクラテスは死すべきものである」が真であること、つまり $mortal(Socrates)$ が A1 と A2 の論理的帰結であることを示そう。

もしも A1 $\wedge$ A2 がある解釈 I で真であるとすれば、A1 も A2 も I で真である。従って、

$$\forall x(man(x) \rightarrow mortal(x))$$

が真、すなわち定義域中のどの要素 x に対しても $(man(x) \rightarrow mortal(x))$ が真であるから、x を $Socrates$ で置き換えた式、

$$man(Socrates) \rightarrow mortal(Socrates)$$

も真である。また、A2、つまり $man(Socrates)$ も真である。従って、

A1': $man(Socrates) \rightarrow mortal(Socrates)$

A2': $man(Socrates)$

が真である事が示された。

ここで命題論理の知識を使えば、modus ponens により $mortal(Socrates)$ が真である事がいえる。

[別解] A1' と A2' を真とする解釈 I を考えると、その解釈では A1' が真である事から、

$$\sim man(Socrates) \vee mortal(Socrates)$$

が真であり、A2' が真である事から $\sim man(Socrates)$ は偽である。故に $mortal(Socrates)$ が真である事が示された。

例 3.12 床屋さんは自分の髭をそらない . . .

どの床屋さんも自分の髭をそらない。また自分の髭をそる人にはけちな人がいる。これから、けちな人の中には床屋さんでない人がいることを導けるか？

$A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot)$ をそれぞれ「床屋」、「自分の髭をそる」、「けちである」を表す一項述語とする。すると、B1 が B2、B3 からの論理的帰結であることを示せばよい。

B1: $\exists x(\sim A(x) \wedge C(x))$

B2: $\forall x(A(x) \rightarrow \sim B(x))$

B3: $\exists x(B(x) \wedge C(x))$

B2 と B3 がある解釈 I において真であるとすると、B3 が真である事から、定義域中の要素の中に $B(x) \wedge C(x)$ を満たす要素があることになる。仮にその要素を a とすると、

B3': $B(a) \wedge C(a)$

は真である。これは、I において $B(a)$ も $C(a)$ も真であるを表している。なお同じことだが $\sim B(a)$ は偽である。

また B2 は次の形に書ける。

B2': $\forall x(\sim A(x) \vee \sim B(x))$

従って、x を a で置き換えた式

B2'': $(\sim A(a) \vee \sim B(a))$

は解釈 I において真である。ここで、$\sim B(a)$ が偽である事から、$\sim A(a)$ は解釈 I において真でなければならない。従って、

B1': $C(a) \wedge \sim A(a)$

は解釈 I において真でなければならない。故に、B1 が解釈 I で真である事が示せた。従って、B1 は B2 と B3 の論理的帰結である。

3.5　一階述語論理の公理系

3.5.1　公理系

命題論理と同様に、一階述語論理でも (健全で完全な) 公理系が考えられる。ここで紹介するものは、命題論理の公理系に対して、公理と推論規則をそれぞれ一つづつ付け加えたものである。これも Russell と Whitehead によるものである。

定義 3.19　公理系 (A1 から A4 は**公理**、B1, B2 は**推論規則**と呼ばれる)

A1　$P \to (Q \to P)$

A2　$(P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$

A3　$(\sim P \to \sim Q) \to ((\sim P \to Q) \to P)$

A4　$\forall x P[x] \to P[a]$

ここで、$P[x]$ は自由な変項 x を含む論理式 P を表し、$P[a]$ は $P[x]$ 中で自由な変項 x をすべて任意の個体定項 a で置き換えた論理式を表す。

B1　(modus ponens) P と $P \to Q$ から、Q を得る。

B2　(汎化, generalization) $P \to Q[a]$ から $P \to \forall x Q[x]$ を得る。

ここで、$Q[a]$ は任意の個体定項 a を含む (含まなくても良い) 論理式 Q を表し、$Q[x]$ は $Q[a]$ 中の個体定項 a をすべて変項 x で置き換えた論理式を表す。

命題論理でも出てきた形式的証明、証明可能、定理、演繹可能という概念は、ここでも同様に定義される。

定義 3.20　形式的証明

論理式の有限列 $A_1, \ldots, A_n$ があり、$k = 1, 2, \ldots, n$ のそれぞれについて

1. A_1 は公理
2. $1 < k \leq n$ なる A_k は
   (a)　公理、もしくは
   (b)　$i, j < k$ なら A_i と A_j から推論規則 **B1** または **B2** によって直接導かれたもの、

であれば、A_n は**形式的証明可能**、あるいは (形式的) **定理**であるという。また、列 $A_1, \ldots, A_n$ を A_n の**形式的証明**といい、この有限列の長さ n を**形式的証明の長さ**という。

定義 3.21　演繹可能

論理式の有限列 $A_1, \ldots, A_n$ に対し、$k = 1, 2, \ldots, n$ のそれぞれについて

1. A_1 は公理、または Γ の論理式
2. $1 < k \leq n$ なる A_k は

(a)　公理、もしくは Γ の論理式
(b)　$i, j < k$ なら A_i と A_j から推論規則 **B1** または **B2** によって直接導かれたもの、

であれば、A_n は Γ **から演繹可能**という。そして、$\Gamma \vdash A_n$ と書く。

定義 3.22　**演繹定理**

A を閉論理式、B を任意の論理式とし、Γ を任意の論理式の有限列とする。もしも

$$\Gamma, A \vdash B$$

ならば

$$\Gamma \vdash A \to B$$

である。

例 3.13　公理系による証明の例

P を任意の論理式とすると、$P \vdash \forall x P$ であることを証明する。

A1	$P \vdash P \to ((Q \to Q) \to P)$	(1)
前提	$P \vdash P$	(2)
(1),(2),B1	$P \vdash (Q \to Q) \to P$	(3)
(3), B2	$P \vdash (Q \to Q) \to \forall x P$	(4)
命題論理より	$P \vdash Q \to Q$	(5)
(4),(5),B1	$P \vdash \forall x P$	

3.5.2　述語論理の完全性定理

命題論理と同様に完全性、健全性、決定可能性が定義される。

- **完全性** (completeness)
  ある公理系が完全 (complete) であるというのは、どの恒真式も定理式であることである。
- **健全性** (soundness)
  ある公理系が健全 (sound) であるというのは、どの定理式も恒真式であることである。
- **決定可能性** (decidability)
  任意の論理式に対し、それが定理か否かを決定するアルゴリズムがあるとき、決定可能 (decidable) である、という。

そして、今見てきた公理系は、完全であり、健全でもある。では、決定可能性はどうであろうか？

命題論理では、与えられた論理式が恒真か否かは、有限のステップで判定できる (なぜなら、論理式に含まれる素命題の数を n とすると、高々 2^n の手間で計算できる)。

しかし、述語論理の場合、論理式の真理値はモデル、解釈によって異なる。さらに定義域は「有限」とは限らないから、大変な手間を要することは容易に想像できるであろう。

実際、一般に、ある論理式が恒真か否かは、有限の時間では行なえないつまり、任意の論理式の恒真性を決定する一般的なアルゴリズムは存在しない。

詳しくいえば、恒真な論理式に対しては証明可能であるが、そうでなければ証明が停止しない可能性があるのである。これを一階述語論理の**半決定性**という。

3.5.3 自然演繹法

この節では、一階述語論理に対するもう一つの公理系 (推論体系) である自然演繹法 (Natural Deduction) を紹介する。これは Gentzen によって提案されたもので、人間が行なっている推論に近い形であると考えられたため、「自然」の名前が付けられている。

この体系では公理はなく、すべて以下のような形の推論規則である。

$$\frac{A_1, \ldots A_n}{B}$$

ここで、論理式 $A_1, \ldots A_n$ は前提 (premise)、論理式 B は結論 (conclusion) と呼ばれ、$A_1, \ldots A_n$ から B が推論できることを表している。ただし、前提の論理式の順番は任意であり、論理式が重複していても構わない。

定義 3.23　**自然演繹法 (NK) の推論規則**

自然演繹法の推論規則は、以下の 15 個のスキーマ (推論パターン) で表される。ただし、以下では Γ, Δ, Θ は論理式の (空でも良い) 列を表すとする。また $\Delta \subseteq \Gamma$ は論理式の列 Γ が Δ を (集合として考えて) 含んでいることを示す。

(1) **みずまし**

$$\frac{\Delta \vdash A}{\Gamma \vdash A}$$

ただし、$\Delta \subseteq \Gamma$ とする。

(2) $\wedge$ **いれ**

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}$$

(3) $\wedge$ **とり** 1

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$$

(4) $\wedge$ **とり** 2

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

(5) $\vee$ **いれ** 1

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

(6) $\vee$ **いれ** 2

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

(7) $\vee$ **とり**

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Theta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Theta \vdash C}$$

(8) ∀ **いれ**

$$\frac{\Gamma \vdash F(a)}{\Gamma \vdash \forall x F(x)}$$

ただし、結論中 (下式) に a は現れないとする。

(9) ∀ **とり**

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x F(x)}{\Gamma \vdash F(a)}$$

(10) ∃ **いれ**

$$\frac{\Gamma \vdash F(a)}{\Gamma \vdash \exists x F(x)}$$

(11) ∃ **とり**

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x F(x) \quad \Delta, F(a) \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash A}$$

ただし、$\Delta, \exists x F(x), A$ には a は現れないとする。

(12) → **いれ**

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$

(13) → **とり**

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$$

(14) ∼ **いれ**

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \wedge \sim B}{\Gamma \vdash \sim A}$$

(15) ∼ **とり**

$$\frac{\Gamma \vdash \sim (\sim A)}{\Gamma \vdash A}$$

この体系もまた、第一階述語論理の完全な公理系であることが証明されている。

例 3.14　自然演繹法による証明

1. $\vdash A \to A$

$$\frac{A \vdash A}{\vdash A \to A}(\to \text{いれ})$$

2. $\vdash \sim (A \wedge \sim A)$

$$\frac{(A \wedge \sim A) \vdash (A \wedge \sim A)}{\vdash \sim (A \wedge \sim A)}(\sim \text{いれ})$$

3. $\sim (\sim A) \vdash A$

$$\frac{\sim (\sim A) \vdash \sim (\sim A)}{\sim (\sim A) \vdash A}(\sim \text{とり})$$

演習 3.7　公理系の演習問題

Russell と Whitehead による公理系、および自然演繹法により、以下を証明せよ。

1. $P(a) \to \exists x P(x)$
2. $\forall x (P(x) \to Q(x))$ を前提とした時、$\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

第 4 章

導出原理

この節では、論理式の恒真性を証明する機械的なアルゴリズムである導出原理について学ぶ。そのための準備として、スコーレム標準形、節形式、エルブラン領域、置換、単一化などについて学ぶ。

4.1 スコーレム標準形

機械的な証明に用いられるのは、節集合と呼ばれるものである。これは一般の論理式からはほど遠い形である。論理式からその節集合を導くためには、冠頭連言標準形をまず求め、次にスコーレム標準形を求める必要がある。

スコーレム標準形とは、言わば、冠頭連言標準形から存在量化子を取り去った形である。ただ、単純に存在量化子を取り去るわけにはいかない。存在量化子によって束縛されていた変項を何かで置き換えなければならない (そうでないと整式 (wff) にならない)。そこで導入されるのがスコーレム定項とスコーレム関数という概念である。

まず、冠頭連言標準形の論理式からスコーレム標準形を導くアルゴリズムについて述べ、次に、スコーレム定項とスコーレム関数の「意味」について考える。

定義 4.1 スコーレム (Skolem) 標準形

ϕ を冠頭連言標準形の形式をもつ一階述語論理の論理式、つまり、$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n\psi$ という形をもつ論理式とする。ここで、$Q_1 \ldots Q_n$ は量化記号、$x_1 \ldots x_n$ は変項、ψ は量化子を含まない論理式とする。また、$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ の部分を冠頭、ψ を母式と呼ぶ。

例えば $\forall x\exists y\exists z\{P(x) \wedge (Q(x,y) \vee R(x,z))\}$ という式であれば、冠頭 ($Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$ の部分) が $\forall x\exists y\exists z$、母式 ($\psi$ の部分) が $\{P(x) \wedge (Q(x,y) \vee R(x,z))\}$ である。

ϕ に対し、以下の (1),(2),(3) によって得られる論理式を式 ϕ のスコーレム標準形という。

1. $Q_1 = \exists$ の時、頭部から Q_1x_1、すなわち $\exists x_1$ を取り除き、ψ 中のすべての x_1 を ψ **に含まれない新しい個体定項** α で置き換える[*1]。
例えば $\exists u\forall v(P(u) \vee Q(u,v))$ のような式がこれにあてはまる。このステップにより、この式は α を「新たな」(スコーレム) 定項とすれば、$\forall v(P(\alpha) \vee Q(\alpha,v))$ となる。

[*1] 「新しい」個体定項とか「新しい」関数記号という表現がでてくるが、これは、それまでの論理式には現れていない記号を使う、という操作を意味する。

注意しなければならないのは、$\exists x \exists y P(x, y)$ のように、存在量化記号が頭部の先頭に続いている場合は、「それぞれ新しい」(スコーレム) 定項を作らなければならない、ということである。この例では、α, β を新たなスコーレム定項とすれば、スコーレム標準形は $P(\alpha, \beta)$ になる。

2. ある整数 m に対して、$Q_1 = \ldots = Q_{m-1} = \forall$ であり、$Q_m = \exists$ とする。この時、頭部から $Q_m x_m$、すなわち $\exists x_m$ を取り除き、ψ 中のすべての x_m を ψ **に含まれない新たな** $(m-1)$ **項の関数記号** f を用いた項 (関数)$f(x_1, \ldots, x_{m-1})$ で置き換える。

例えば $\forall u \exists v (P(u) \vee Q(u, v))$ のような式がこれにあてはまる。このステップにより、この式は f を「新たな」1 項の (スコーレム) 関数記号とすれば、$f(u)$ により母式の v をすべて置き換えて、スコーレム標準形 $\forall u (P(u) \vee Q(u, f(u)))$ が得られる。

注意しなければならないのは、$\forall x \forall y \exists z P(x, y, z)$ のように、存在量化記号の前に複数の全称量化記号がある場合は、その全称量化記号の変数をすべて引数にとる「新しい」スコーレム関数記号を作らなければならない、ということである。この例では、$\exists$ の前に 2 つの全称記号があるので、新たな 2 項の関数記号 (例えば g) を作り、その引数として x, y をとる関数 (したがって、$g(x, y)$) により z を置き換える。すなわち、得られるスコーレム標準形は $\forall x \forall y P(x, y, g(x, y))$ となる。

3. 上の (1),(2) を適用して得られる論理式を再び $Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi$ と置いて、頭部に存在記号がなくなるまで繰り返す。

スコーレム標準形を、論理式の形の操作と割りきって考えてもらえば問題はないが、その意味的な位置づけを考えようとする人もいるだろう。以下では、スコーレム定項、スコーレム関数の意味について議論する。

もとの論理式が $\exists x \phi$ という冠頭連言標準形の論理式であるとしよう。このスコーレム標準形は ϕ において、x を適当なスコーレム定項 (これを仮に α とする) で置き換えたものである (それを $\phi\{\alpha/x\}$ と表わすこととする)。例えばもとの論理式が $\exists x (P(x) \wedge Q(x, x))$ ならば、そのスコーレム標準形は、

$$(P(x) \wedge Q(x, x))\{\alpha/x\} \quad \text{すなわち} \quad (P(\alpha) \wedge Q(\alpha, \alpha))$$

である。ここで、あるモデルにおいてもとの論理式が真であるとすれば、それは、x に対して定義域中の要素 (仮に γ とする) を割り当てる適当な割当て関数 g' のもとで ϕ が真となることを意味する。この割当て関数 g' が x に割当てる要素に名前をつけてしまう、これが α という名前をつけられたスコーレム定項の意味である。つまり、スコーレム定項を α とし、解釈関数を $\mathcal{F}$ とすると、「α は $\mathcal{F}(\alpha) = \gamma$ となるようなもの」と定義するのである[*2]。

次にスコーレム関数の意味を考えよう。例えば $\forall x \exists y P(x, y)$ に対するスコーレム標準形を考えよう。それは適当な 1 項のスコーレム関数記号 f を用いて (存在量化されていた

[*2] 実際に γ がどのようなものであるかは知らないし、知りようがない。しかしもとの論理式 $\exists x \phi$ がモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ において真であることから、γ のような要素が定義域 $\mathcal{D}$ 中にあることは確実である。そこで解釈関数 $\mathcal{F}$ を操作して、スコーレム定項を解釈したときに、そのような要素を返すようにする、というのがスコーレム定項の考えである。

なお、もとの論理式が偽となる場合は、スコーレム定項の解釈をどのように与えても (問題なく) 偽となる。そのため適当にスコーレム定項を選んでもよい。

変項 y を $f(x)$ で置換して)、

$$\forall x P(x, f(x))$$

となる。ここで、この $f(x)$ はどういう関数なのかを考えよう。

元の論理式 $\forall x \exists y P(x, y)$ がモデル $\mathcal{M}$ のもとで真となるための必要十分条件は、どの割当て関数 g に対しても、g の x 変種の関数 g' に対して $\mathcal{M}, g' \models \exists y P(x, y)$ が成り立つことである。

定義域を仮に $\{d_1, \cdots, d_n\}$ とすると、これは、$g_1(x) = d_1, \cdots, g_n(x) = d_n$ となること以外は g に一致するようなどの割当て関数 g_i に対しても、$\mathcal{M}, g_i \models \exists y P(x, y)$ が成り立つことを意味する。

さらにこれは、それぞれの g_i の y 変種の適当な割当て関数 (それを仮に g_{ij} とする) に対して $\mathcal{M}, g_{ij} \models P(x, y)$ が真となることを意味する。そこで、$g_i(x)$ の値に対して適当な y の値を返す関数 (これを仮に $f(x)$ と名付ける、そして $f(g_i(x)) = g_{ij}(y)$ となるようにする。このような関数がスコーレム関数である) を用意できれば $\mathcal{M}, g_i \models \exists y P(x, y)$ が成り立つための必要十分条件は、$\mathcal{M}, g_i \models P(x, f(x))$ が成り立つこととなる。そして f の作り方から、 $\mathcal{M}, g_i \models P(x, f(x))$ が成り立つための必要十分条件は $\mathcal{M}, g \models P(x, f(x))$ が成り立つことであることは明らか。したがって、「適切にスコーレム関数が作れれば」元の論理式 $\forall x \exists y P(x, y)$ とそのスコーレム標準形 $\forall x P(x, f(x))$ は同値である。

こう考えれば、どのような論理式を考えても、適切なスコーレム定項やスコーレム関数を定義できれば、同値なスコーレム標準形が存在することは明らかであろう。

ただし、「適切なスコーレム定項やスコーレム関数」はモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{F} \rangle$ の内容を参照しないと定義できないことにも気が付いたことであろう。つまり、形式上の操作だけでは、**もとの論理式とスコーレム標準形の同値性は**保証されない。それでも、**もとの論理式が充足不能ならばそのスコーレム標準形も充足不能となる**ということは保証される。これが後の機械的な証明で用いられる性質である。

4.2 節集合

節集合 (Clause Set, 節形式ともいう) は、文字通り「節」の集合を意味する。形式的にはスコーレム標準形から次のようにして、全称量化子を取り除き、節を要素とする集合をつくる (したがって、連言結合子も除去される)。

スコーレム標準形は、以下のような形をしている:

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \{(L_{11} \vee \ldots \vee L_{1i}) \wedge \ldots \wedge (L_{m1} \vee \ldots \vee L_{mj})\}$$

全称量化記号とその組となっている変項 (冠頭の部分) を削除し、母式に現れる「節」を要素とする集合を作る。

$$\{L_{11} \vee \ldots \vee L_{1i},\ \ldots,\ L_{m1} \vee \ldots \vee L_{mj}\}$$

これを元の論理式の節集合という。

なお、この時、紛らわしさを避けるため、節 (集合の要素) ごとに変項を付け替えた方がよい。

例 4.1　スコーレム標準形の論理式 $\forall u(P(u) \vee Q(u, f(u)))$ に対する節集合形式は、$\{P(u) \vee Q(u, f(u))\}$

例 4.2 スコーレム標準形の論理式 $\forall x \forall y (P(x) \wedge (P(y) \vee Q(x, y)))$ に対する節集合形式は、$\{P(x),\ P(y) \vee Q(z, y)\}$ (2 番目の要素において変項 x を z に付け替えている)

演習 4.1 以下の式のスコーレム標準形と節集合をそれぞれ求めよ。ただし、x, y, z は個体変項であり、a, b は個体定項とする。用いるスコーレム定項やスコーレム関数の宣言を忘れずに書くこと。詳細な変換過程も示すこと。

1. $\forall x (P(x) \to \exists y Q(x, y))$
2. $\forall x \sim (Q(x, x) \to \forall y \sim P(y))$
3. $\exists x (P(x) \to \exists y (Q(x, y) \to R(x, y)))$
4. $\forall x \forall y (P(x, y) \wedge Q(x, y)) \to \forall x \forall y R(x, y)$
5. $\forall x (P(a, b) \to \exists y (Q(a, y) \vee R(y, y)))$
6. $\forall x \forall y (P(x, y) \vee Q(x, y)) \wedge \sim \forall x \forall y (R(x, y) \vee P(x, x))$
7. $\exists x (\sim (\exists y P(x, y)) \to (\exists z Q(z) \to R(x)))$
8. $\forall x \forall y (\exists z P(x, y, z) \wedge (\exists u Q(x, u) \to \exists v Q(y, v)))$
9. $\sim \forall x \{(P(x) \wedge \exists y [Q(x, y) \vee R(y)]) \to \exists z S(x, z)\}$
10. $\sim \forall x \{P(x) \vee \exists y [(Q(x, y) \to Q(y, x)) \vee \forall z (Q(y, z) \to R(x))]\}$
11. $\forall x \{(P(x) \vee \sim W(x)) \to \sim \exists y [Q(x, y) \wedge \forall z R(y, z)]\}$
12. $\exists x \sim \{(P(x) \vee W(x)) \to \exists y [\sim Q(x, y) \vee \exists z R(y, z)]\}$

4.3 置換

定義 4.2 **置換 (substitution)**

置換とは、$\{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\}$ の形の有限集合である。ここで、どの v_i もそれぞれ異なる変項であり、それに対応するどの t_i も v_i とは異なる項である。

例 4.3 置換の例

以下のものは置換である。

$$\{f(z)/x, y/z\}, \quad \{a/x, g(y)/y, f(g(b))/z\}$$

定義 4.3 **置換の適用と例示 (instance)**

$\theta = \{t_1/v_1, t_2/v_2, \ldots, t_n/v_n\}$ を置換とし、E を論理式とすると、$E\theta$ は E に置換 θ を適用して得られた式である。ただし、E 中の変数 v_i も対応する t_i で同時に置き換えられている。この $E\theta$ を E の**例示** (インスタンス) という。

例 4.4 置換の適用の例

1. $\theta = \{a/x, f(b)/y, c/z\}, E = P(x, y, z)$ とすると、
   $E\theta = P(a, f(b), c)$

2. $\theta = \{f(z)/x, y/z\}, E = P(x, y, z)$ とすると、
   $E\theta = P(f(z), y, y)$

定義 4.4　**置換の合成 (composition)**

$\theta = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}, \lambda = \{u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$ を置換とすると、とすると、その合成 $\theta \circ \lambda$ も置換であり、

$$\{t_1\lambda/x_1, \ldots, t_n\lambda/x_n, u_1/y_1, \ldots, u_m/y_m\}$$

から、$t_j\lambda = x_j$ となるような $t_j\lambda/x_j$ と、$y_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$ であるような u_i/y_i をすべて除去したものである。

例 4.5　置換の合成の例

$\theta = \{f(y)/x, z/y\}, \lambda = \{a/x, b/y, y/z\}$ とすると、$\theta\circ\lambda$ は $\{f(b)/x, y/y, a/x, b/y, y/z\}$ から $\{y/y, a/x, b/y\}$ を取り除いた結果である。すなわち、

$$\theta \circ \lambda = \{f(b)/x, y/z\}$$

置換の合成では結合律が成り立つ。すなわち、どの置換 θ, λ, μ に対しても、

$$(\theta \circ \lambda) \circ \mu = \theta \circ (\lambda \circ \mu)$$

である。
また、空の置換 $\epsilon = \{\ \}$ に対しては、どの置換 θ に対しても、$\epsilon \circ \theta = \theta \circ \epsilon = \theta$ である。

演習 4.2　置換の練習問題

1. $\theta = \{a/x, b/y, g(x, y)/z\}$ を置換とすると、$P(h(x), g(x, y), z)\theta$ を求めよ。
2. $\lambda = \{h(a)/x, x/y, h(y)/z\}$ を置換とすると、$P(x, h(y), h(z))\lambda$ を求めよ。
3. 上記の問題の θ と λ の合成、すなわち $\theta \circ \lambda$、および $\lambda \circ \theta$ をそれぞれ求めよ。
4. 上記の問題の θ と λ を用いて、$P(h(x), g(x, y), z)(\theta \circ \lambda)$ と $(P(h(x), g(x, y), z)\theta)\lambda$ とをそれぞれ求め、二つが一致することを確かめよ。

4.4 単一化

定義 4.5　単一化子 (unifier)

置換 θ が論理式の集合 $\{E_1, \ldots, E_k\}$ の単一化子であるための必要十分条件は、$E_1\theta = E_2\theta = \ldots = E_k\theta$ が成り立つことである。このような単一化子が存在する時、集合 $\{E_1, \ldots, E_k\}$ は**単一化可能** (unifiable) であるという。

定義 4.6　最汎単一化子 (mgu, most general unifier)

単一化子 σ が論理式の集合 $\{E_1, \ldots, E_k\}$ に対する**最汎単一化子** (mgu) であるための必要十分条件は、その式の集合に対するどの単一化子 θ に対しても、$\theta = \sigma \circ \lambda$ なる置換がそれぞれ存在することである。

例 4.6　最汎単一化子 (mgu) の例

- 論理式の集合 $\{P(a, y), P(x, f(b))\}$ は単一化子 $\theta = \{a/x, f(b)/y\}$ を持つから、単一化可能である。
- 論理式の集合 $\{P(x, y), P(z, a)\}$ は最汎単一化子 $\sigma = \{x/z, a/y\}$ を持つ。
  例えば、$\theta = \{a/x, a/y, a/z\}$ もこの式の集合に対する単一化子であるが、$\theta = \sigma \circ \{a/x\}$ が成立する。また $\lambda = \{z/x, a/y\}$ も別な最汎単一化子 (mgu) である。

4.5　**単一化アルゴリズム** (unification algorithm)

ここでは、最汎単一化子 (mgu) を求めるアルゴリズムを考える。

基本的には、対象となる式集合の各要素 (つまり論理式) に対して、どこが違っているかを頭から比較し、違いが見つかれば、それは変数に対し適当な値で置き換えることで「等しくでき」ないか考え、もし可能ならそのような置換を作り、それを式全体に対して適用する。そして、またどこが違っているかを頭から比較し、適当な置換を作り、それを適用し、. . . ということを繰り返すものである。

例えば、$\{P(x), P(a)\}$ に対する mgu を求めるには、この二つの式を頭からみていくと、x と a だけが違うことが分かる。従って、$\{a/x\}$ という置換をつくって元の式集合に適用すれば、二つの式は共に $P(a)$ となるので、$\{a/x\}$ が求める mgu であることが分かる。

ここで、「違いを求める」ことが必要になるが、そのために不一致集合の定義をしておく。

定義 4.7　**不一致集合 (disagreement set)**

基本論理式の集合 W に対する**不一致集合**とは、それぞれの要素 (基本論理式) を左から見ていって、初めて一致しない (同じでない) 項を取り出して集めたものである。

例 4.7　不一致集合の例

- 論理式の集合 $\{P(a, y), P(x, f(b))\}$ に対する不一致集合は、次のようにして求められる。それぞれの式を分解して書けば、
  P (　a,　　y)
  P (　x,　f(b))
  従って、これを左から見ていけば、$\{a, x\}$ が不一致集合であることが求められる。
- 論理式の集合 $\{P(x, f(y, z)), P(x, a), P(x, g(h(k(x))))\}$ に対する不一致集合は

P (x, f(y,z))
P (x, a)
P (x, g(h(k(x))))
から、$\{f(y,z), a, g(h(k(x)))\}$ と求められる。

定義 4.8 単一化アルゴリズム

対象とする基本論理式の集合を W とする。

Step 1: $k = 0, W_k = W, \sigma_k = \epsilon$ とする。

Step 2: W_k が要素数が 1 の集合 (singleton set という) ならば、σ_k を単一化子として終了。さもなくば、W_k の不一致集合を D_k とする。

Step 3: D_k 中に変項 v_k があり、D_k 中の他の項 t_k において v_k が現れないならば次に進む。さもなくば (つまり変項が存在しないか、t_k 中に現れる変項 v_k が D_k の要素としてある場合)、W_k は単一化不能であるとして終了。

Step 4: $\sigma_{k+1} = \sigma_k \circ \{t_k/v_k\}$、$W_{k+1} = W_k\{t_k/v_k\}$ とする。

Step 5: $k = k + 1$ として、Step 2 にいく。

このアルゴリズムは、W に現れる変項の個数に比例した手間で計算できることは明らか。また、変項の個数は有限であるから、従って、このアルゴリズムは有限回のステップで終了する。

例 4.8 mgu を求める例

$W = \{P(a, x, f(g(y))), P(z, f(z), f(u))\}$ の mgu を求めよう。

1. $\sigma_0 = \epsilon, W_0 = W$ とする。W_0 は singleton でないから、σ_0 は W に対する mgu ではない。
2. 不一致集合を求めると、$D_0 = \{a, z\}$ である。D_0 には、変項 z があり、もう一つの項である a には z は現れないから、
$$\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{a/z\} = \{a/z\}$$
であり、
$$W_1 = W_0\sigma_1 = \{P(a, x, f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$$
である。
3. W_1 はまだ singleton ではないから、不一致集合を求めると、$D_1 = \{x, f(a)\}$ である。D_1 には変項 x があり、もう一つの項 $f(a)$ には x は現れない。従って、
$$\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{f(a)/x\} = \{a/z, f(a)/x\}$$
であり、
$$W_2 = W_1\{f(a)/x\} = \{P(a, f(a), f(g(y))), P(a, f(a), f(u))\}$$
である。
4. W_2 はまだ singleton ではないから、不一致集合を求めると、$D_2 = \{g(y), u\}$ である。D_2 には変項 u があり、もう一つの項 $g(y)$ には u は現れない。従って、
$$\sigma_3 = \sigma_2 \circ \{g(y)/u\} = \{a/z, f(a)/x, g(y)/u\}$$

であり、

$$W_3 = W_2\{g(y)/u\} = \{P(a, f(a), f(g(y)))\}$$

である。

5. W_3 は singleton であるから、終了し、$\sigma_3 = \{a/z, f(a)/x, g(y)/u\}$ が求める mgu である。

演習 4.3　単一化の練習問題以下にあげる節集合が単一化可能か否かを決定し、可能なら mgu を求めよ。

1. $\{Q(a), Q(b), Q(x)\}$
2. $\{Q(a, x), Q(a, a), Q(x, a)\}$
3. $\{Q(a, x, f(x)), Q(a, y, y)\}$
4. $\{Q(x, y, z), Q(u, h(v, v), u)\}$
5. $\{P(0, x, x), P(y, s(s(y)), s(z))\}$
6. $\{P(x, y, s(x)), P(s(0), s(s(x)), z)\}$

4.6　導出原理

4.6.1　命題論理の導出原理

ここで Robinson によって考え出された導出原理を紹介しよう。

最初に、命題論理における導出原理について考察する。まず、次のような節を考えよう。

C_1 : P
C_2 : $\sim P \vee Q$

これらに対し modus ponens の規則を適用できることを思い出せば、我々は容易に次の節を導くことができる。

C_3 : Q

ここで行なったものは、二つの節 (C_1, C_2) を見比べて、互いに補リテラルになっているものがそれぞれの節に含まれているかどうか調べ (P と $\sim P$)、その相補対を消し去って新たな節を得る (C_3)、というものである。

この方法を拡張したものが、導出原理である。砕けて言えば、導出原理とは、

> どの二つの節 C_1 と C_2 に対しても、C_1 中のリテラル L_1 に対して、その補リテラル $\sim L_1$ が C_2 中にあれば、それらを二つの節から消去し、残りの節を選言 (or, $\vee$) でつないで、新たな節を得る。

ということである。こうして得られる節を**導出節 (resolvent)** といい、導出節を得るのに用いられた元の二つの節を親節という。

例 4.9　導出節の例

C_1 : $\sim P \vee Q \vee R$

C_2 : $\sim Q \vee S$
から得られる導出節は $\sim P \vee R \vee S$ である。

以下の定理が成り立つ。

定理 4.1 節 C_1 と C_2 の導出節 C は、C_1 と C_2 の論理的帰結である (もしくは、節 C_1 と C_2 の導出節 C は、C_1 と C_2 から論理的に含意される、とも言う)。

ここで、二つの節が $\sim P$ と P のような単位節であった場合を考えると、導出節を作ると、何も残らなくなってしまう。このような特殊な導出節を空節と呼び、$\Box$や $\{\}$ や ϕ で表す。

空節は、矛盾を表すと考えられる。なぜなら、親節が互いに反する命題を表しているからである。

ここで、証明でよく用いられる背理法を思いだそう。背理法とは、証明すべき命題の否定命題を仮定し、前提条件とから矛盾を導くことにより、「証明すべき命題の否定命題が成立しない」ことをいう、すなわち、「証明すべき命題が成立する」ことを示すものである。

このアイデアを用いたものが導出原理による証明である。導出原理による証明とは、本質的には、節集合 C が空節 (empty clause) $\Box$を含むかどうかを調べるものである。もしも C が$\Box$を含めば、C は充足不能である。もしも C が $\Box$を含まないのであれば、空節$\Box$が節集合 C から導けないかを調べる。これが証明できれば、やはり元の節集合は充足不能であることが示される。

また反駁定理によれば、前提集合を Δ で表し、証明すべき命題を Ψ で表すと、$\Delta \cup \{\sim \Psi\}$ が充足不能であることを示せば、Ψ が Δ の論理的帰結である (論理的に含意する) ことを示すことになる。つまり、証明すべき命題の「否定」と前提条件とからなる節集合が充足不能であることを示すことによって、証明すべき命題が「前提からの帰結」であることを示すのである。

ここで、重要なことは、節の集合 C が充足不能であるならば、我々は導出原理を用いて必ず空節を導くことができる、ということである。

定義 4.9 **演繹と反駁**

S を節集合、C を節とする。このとき、次のような節の列 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ を S から C への**演繹** (deduction) という。

1. 各 $C_i (1 \leq i \leq n)$ は S の要素か、もしくは、C_j と C_k $(j, k < i)$ の導出節。
2. $C_n = C$

特に、S から空節$\Box$への演繹を S の**反駁** (refutation) もしくは証明と言う。

例 4.10 $S = \{\sim P \vee Q, \sim Q, P\}$ とすると、最初の二つの節から、$\sim P$ が得られ、これと三番目の節から空節$\Box$が得られる。

空節が S から得られたから、定理 4.1 により、空節は S の論理的帰結である。しかるに、空節は充足不能な節の集合からだけ論理的帰結として得られるものである

から、S は充足不能である。

以下では、この考えを一階述語論理に適用することを考える。それには、変項と項の対応を考えなければならない。例えば、$P(x)$ と $\sim P(a)$ とが補リテラルを構成するか、が問題となる。

4.6.2　導出節

定義 4.10　**二項導出節 (binary resolvent)**

C_1 と C_2 を同じ変項を共通に持たない節とする。L_1, L_2 をそれぞれ C_1, C_2 のリテラルとする。もしも L_1 と $\sim L_2$ が mgu σ を持てば、

$$(C_1\sigma - L_1\sigma) \vee (C_2\sigma - L_2\sigma)$$

は C_1 と C_2 の**二項導出節**といい、この時の C_1 と C_2 を**親節**という。また L_1, L_2 は導出に用いられたリテラルという。
ただしここで、$C - L_i$ とは、C が $L_1 \vee \ldots \vee L_{i-1} \vee L_i \vee L_{i+1} \ldots \vee L_k$ と表された時、$C - L_i$ は $L_1 \vee \ldots \vee L_{i-1} \vee L_{i+1} \ldots \vee L_k$ を表すものとする。すなわち、節 C から L_i を取り除いたものである。また、$C_1\sigma - L_1\sigma$ もしくは $C_2\sigma - L_2\sigma$ のどちらかが空の場合は、二項導出節は空でない方の結果と等しくなる。
二項導出節で空節が導かれるのは、親節がただ一つのリテラルからなる場合、たとえばそれぞれ $P(x)$ と $\sim P(a)$ のような場合である。

例 4.11　二項導出節の例

$C_1 = P(x) \vee Q(x)$、$C_2 = \sim P(a) \vee R(y)$ とする。
$L_1 = P(x)$、$L_2 = \sim P(a)$ とすると、$\sim L_2 = P(a)$ であるから、L_1 と $\sim L_2$ は単一化子 $\sigma = \{a/x\}$ をもつ。従って、

$$\begin{array}{rcl}(C_1\sigma - L_1\sigma) \vee (C_2\sigma - L_2\sigma) & = & (P(a) \vee Q(a) - P(a)) \vee (\sim P(a) \vee R(y) - \sim P(a)) \\ & = & Q(a) \vee R(y)\end{array}$$

定義 4.11　**因子 (factor)**

節 C 中の二つ以上のリテラルが mgu σ を持つ時節 $C\sigma$ を C の**因子**といい、σ を**因子単一化子** (factor unifier) という。

例 4.12　因子の例

$C = P(x) \vee P(f(y)) \vee \sim Q(x)$ とする。$P(x)$ と $P(f(y))$ とは mgu $\sigma = \{f(y)/x\}$ を持つ。従って、因子は $C\sigma = P(f(y)) \vee \sim Q(f(y))$。

定義 4.12　**(一般) 導出節 (resolvent)**

節 C_1 と C_2 を親節とする **(一般) 導出節**は次のいずれかである。

1. C_1 と C_2 の二項導出節
2. C_1 の因子と C_2 との二項導出節
3. C_1 と C_2 の因子との二項導出節
4. C_1 の因子と C_2 の因子との二項導出節

例 4.13 一般導出節の例

$C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(x)$、$C_2 =\sim R(z) \vee \sim R(f(a)) \vee Q(z)$ とする。
C_1 の因子 C_1' は $P(f(y)) \vee R(f(y))$ であり、C_2 の因子 C_2' は $\sim R(f(a)) \vee Q(f(a))$ である。

1. C_1 と C_2 の二項導出節は、$P(x) \vee P(f(y)) \vee \sim R(f(a)) \vee Q(x)$ および $P(f(a)) \vee P(f(y)) \vee \sim R(z) \vee Q(z)$ である。
2. C_1 の因子と C_2 との二項導出節は、$P(f(y)) \vee \sim R(f(a)) \vee Q(f(y))$ および $P(f(a)) \vee \sim R(z) \vee Q(z)$ である。
3. C_1 と C_2 の因子との二項導出節は、$P(f(a)) \vee P(f(y)) \vee Q(f(a))$ である。
4. C_1 の因子と C_2 の因子との二項導出節は、$P(f(a)) \vee Q(f(a))$ である。

4.6.3 導出原理を用いた証明の例

導出原理は、節の集合から導出節を作り出す「推論」方式である。この方式は「完全」である。すなわち、充足不能な節の集合からは必ず空節$\Box$が導ける。
ただし、ここで次のようなコツがあることに注意:

> 空節が矛盾を表すこと、その矛盾がどこから来るものであるかを考えると、必ず『結論 (の否定)』から導かれることが分かる。そこで結論の否定、もしくはそれを親 (先祖) とする導出節を導出節を作る際の親節とする。

例 4.14 導出原理によって空節を導く例

$$
\begin{array}{lll}
C = \{ & \sim T(x,y,u,v) \vee P(x,y,u,v), & \ldots (1) \\
& \sim P(x,y,u,v) \vee E(x,y,v,u,v,y), & \ldots (2) \\
& T(a,b,c,d), & \ldots (3) \\
& \sim E(a,b,d,c,d,b) \qquad \} & \ldots (4)
\end{array}
$$

とする。

(2) と (4) から	$\sim P(a,b,c,d)$	$\ldots (5)$
(1) と (5) から	$\sim T(a,b,c,d)$	$\ldots (6)$
(6) と (3) から	$\Box$	

例 4.15 複雑な例

$P(x), Q(x), D(x), L(x,y)$ をそれぞれ「x は患者」「x は偽医者」「x は医者」「x は y

が好き」を表す述語とする。このとき、(F_1)「ある患者はどの医者も好きだ」(F_2)「どの患者も偽医者を好きではない」ということを前提とすれば、(F_3)「どの医者も偽医者ではない」が帰結として導けることを導出原理を用いて示そう。

まず、それぞれの命題に対応する一階述語論理式は以下である。

$$F_1 = \exists x(P(x) \wedge (\forall y(D(y) \rightarrow L(x,y))))$$

$$F_2 = \forall x(P(x) \rightarrow (\forall y(Q(y) \rightarrow \sim L(x,y))))$$

$$F_3 = \forall x(D(x) \rightarrow \sim Q(x))$$

次に、F_1, F_2 に対応する節集合を求める (ここで、a をスコーレム定項とする)。

$F_1 = \{P(a), \sim D(x) \vee L(a,x)\}$　... (1) および (2)

$F_2 = \{\sim P(u) \vee \sim Q(v) \vee \sim L(u,v)\}$　... (3)

帰結の論理式に対しては、その否定の論理式 $(\sim F_3)$ に対する節集合を求める。ここで $\sim F_3$ のスコーレム標準形は $D(b) \wedge Q(b)$(ただし b をスコーレム定項とする) とおけるから、求める節集合は

$\sim F_3 = \{D(b), Q(b)\}$　... (4) および (5)

となる。そこで、$\{F_1,\ F_2,\ \sim F_3\}$ が充足不能であることを、導出原理によって示そう。

(6)　$L(a,b)$ .... (4) と (2) から最汎単一化子を $\{b/x\}$ として

(7)　$\sim P(a) \vee \sim Q(b)$ .... (6) と (2) から最汎単一化子を $\{a/u, b/v\}$ として

(8)　$\sim Q(b)$ .... (7) と (1) から最汎単一化子を $\{\}$ として

(9)　$\{\}$ .... (8) と (5) から最汎単一化子を $\{\}$ として

ゆえに空節が導かれたから、$\{F_1, F_2, \sim F_3\}$ は充足不能である。よって、F_3 は F_1 と F_2 の論理的帰結であることが示された。

例 4.16　もっと複雑な例

「(P1) 特別許可を持たずにパーティ会場に入った人はみな警察官によって探されている。(P2) あるギャングがパーティ会場に入ったが、彼を探しているのはギャングだけである。(P3) どのギャングも特別許可を持っていない。(P4) どのギャングも人間である。」ということから「(P5) ある警察官はギャングである」という結論が得られることを示そう。

ここで、$E(x)$ は「x は会場に入った」、$V(x)$ は「x は特別許可を持っている」、$H(x)$ は「x は人間である」、$G(x)$ は「x はギャングである」、$P(x)$ は「x は警察官である」、$S(x,y)$ は「x が y を探している」を表すものとする。

まず、前提を論理式によって表現する。

(P1)　$\forall x(E(x) \wedge \sim V(x) \wedge H(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge S(y,x)))$

(P2)　$\exists x(G(x) \wedge E(x) \wedge \forall y(S(y,x) \rightarrow G(y)))$

(P3)　$\forall x(G(x) \rightarrow \sim V(x))$

(P4)　$\forall x(G(x) \rightarrow H(x))$

結論の**否定**は以下のように表される。

(～ P5)　$\sim \exists x(P(x) \wedge G(x))$

まず (P1)～(P4), (～ P5) の節集合を求める。

(P1)　f を一項のスコーレム関数とする。

$\{\sim E(x) \vee V(x) \vee \sim H(x) \vee S(f(x), x),$ ....(1a)

$\sim E(y) \vee V(y) \vee \sim H(y) \vee P(f(y))\}$ ....(1b)

(P2)　a をスコーレム定項とする。

$\{G(a),$ ....(2a)

$E(a),$ ....(2b)

$\sim S(z, a) \vee G(z)\}$ ....(2c)

(P3)　$\{\sim G(u) \vee \sim V(u)\}$ ....(3)

(P4)　$\{\sim G(v) \vee H(v)\}$ ....(4)

($\sim$ P5)　$\{\sim P(w) \vee \sim G(w)\}$ ....(5)

これらにより以下のように導出節を作り空節を導く。

(6)　$\sim E(y) \vee V(y) \vee \sim H(y) \vee \sim G(f(y))$. (5) と (1b)、最汎単一化子 (mgu) は $\{f(y)/w\}$

(7)　$V(a) \vee \sim H(a) \vee \sim G(f(a))$ ....(6) と (2b)、最汎単一化子は $\{a/y\}$

(8)　$\sim G(a) \vee \sim H(a) \vee \sim G(f(a))$ ....(7) と (3)、最汎単一化子は $\{a/u\}$

(9)　$\sim H(a) \vee \sim G(f(a))$ ....(8) と (2a)

(10)　$\sim G(a) \vee \sim G(f(a))$ ....(9) と (4)、最汎単一化子は $\{a/v\}$

(11)　$\sim G(f(a))$ ....(10) と (2a)

(12)　$\sim S(f(a), a)$ ....(11) と (2c)、最汎単一化子は $\{f(a)/z\}$

(13)　$\sim E(a) \vee V(a) \vee \sim H(a)$ ....(12) と (1a)、最汎単一化子は $\{a/x\}$

(14)　$V(a) \vee \sim H(a)$ ....(13) と (2b)

(15)　$\sim G(a) \vee \sim H(a)$ ....(14) と (3)、最汎単一化子は $\{a/u\}$

(16)　$\sim H(a)$ ....(15) と (2b)

(17)　$\sim G(a)$ ....(16) と (4)、最汎単一化子は $\{a/v\}$

(18)　$\{\ \}$ ....(17) と (2a)

以上により空節が導かれたから、$\{P1, P2, P3, P4, \sim P5\}$ は充足不能である。よって、P5 は P1〜P4 の論理的帰結であることが示された。

演習 4.4　導出原理の演習

1. (A), (B), (C) から、(D) が結論として得られることを、導出原理を用いて示せ。
   (A)　$\forall x(P(x) \to \exists y Q(y))$
   (B)　$\forall x(R(x) \to \exists y P(y))$
   (C)　$R(a)$
   (D)　$\exists x Q(x)$
2. 「学生の中にはどの教授をも尊敬しているものがいる。どの学生も泥棒を尊敬していない。」ことを前提として、「どの教授も泥棒ではない。」が演繹されることを導出原理を用いて示せ。
   ただし、$S(u), P(v), T(w), R(x, y)$ をそれぞれ「u は学生である」、「v は教授である」、「w は泥棒である」、「x は y を尊敬している」を表す述語とする。
3. 個体定項 $taro$ を太郎、m を月を表すとする。また、$Human(x)$ は「x は人間である」、$Live(x, y)$ は「x は y に住んでいる」をそれぞれ表すとする。
   以下の (A) と (B) から (C) が結論として得られることを、導出原理を用いて示せ。
   (A)　月には人間はひとりも住んでいない。

(B) 太郎は月に住んでいる。

(C) 太郎は人間ではない。

4. $M(x)$ は「x は男性である」、$\mathcal{F}(x)$ は「x は女性である」、$C(x)$ は「x は料理が上手だ」をそれぞれ意味するとする。

(a) 以下の文を一階述語論理式で表せ。

A：男性は女性ではない。

B：料理が上手な女性がいる。

C：料理が上手だが、男性でないものがいる。

(b) 上の A, B, ∼ C に対応する論理式を、スコーレム標準形で表せ。

(c) A と B から、C が結論として得られることを、導出原理を用いて示せ。

4.7 なぜ導出原理による証明で空節を導くのか

導出原理を用いた証明は、概略、次のようなステップによって証明が行なわれた。

1. 日本語で書かれた前提および結論をそれぞれ論理式で表す。
   例えば、前節の例では、「ある患者はどの医者も好きだ」という命題は $\exists x(P(x) \wedge (\forall y(D(y) \to L(x,y))))$ という論理式で表された。
2. 前提を表す論理式、および結論を表す論理式の**否定**に対し、節集合を求める。
   例えば、前節の例では、「ある患者はどの医者も好きだ」という前提の命題に対して、$\{P(a), \sim D(x) \vee L(a,x)\}$ という節集合が求められた。
3. 前提および結論の否定から導いた節集合に対し、導出原理を用いて空節 (矛盾を表す) を導出する。
4. 矛盾を表す空節が導出されたことにより、前提および結論の否定から導いた節集合が充足不能であることを明示的に述べる。
   例えば、前節の例では以下のように書いた。
   ゆえに空節が導かれたから、$\{F_1, F_2, \sim F_3\}$ は充足不能である。
5. 最後になにが証明されたかを明示的に述べる。例えば、前節の例では以下のように書いた。
   よって、F_3 は F_1 と F_2 の論理的帰結であることが示された。

ここで、「空節を導く必要が本当にあるのか」という疑問を持った人がいるかもしれない。つまり、前提 (の論理式) から導いた節集合だけから導出原理によって結論 (の論理式) の節集合が導ければ証明にならないのだろうか、というような疑問である。

確かに節 C_1 と C_2 の導出節 C は、C_1 と C_2 の論理的帰結となる。しかし、結論から言えば、ごく稀な場合を除き、一般には「証明にはならない」。ではどこが問題なのであろうか。

ポイントは「前提 (や結論) を表す論理式から求めた節集合が、必ずしも元の前提 (や結論) を表す論理式とは**同値ではない**」ということである。節集合の導き方をここで復習しよう。一般の論理式から節集合を求めるには、(1) 冠頭連言標準形にし、それを (2) スコーレム標準形にし、最後に (3) 節集合にするのであった。ここで (1) は確かに元の論理式と同値であり、(2) と (3) も同値と言える。ということは (1) と (2) が同値ではなかっ

た、ということを意味する。実は、スコーレム関数やスコーレム定項を導入したことから同値性が崩れているのであった。実は (1) と (2) の間の関係は、こういう関係である。

> 冠頭連言標準形の論理式が充足可能ならば、スコーレム標準形も充足可能。また、スコーレム標準形が充足可能ならば、それを導いた元の冠頭連言標準形の論理式も充足可能である。

しかし、互いに充足可能だからと言って、「元の冠頭連言標準形の論理式が真となる同じモデルにおいて、その論理式から導かれたスコーレム標準形が真となるとは限らない」のである。これはスコーレム標準形で、スコーレム関数やスコーレム定項が新たに導入されたことが原因となっている。つまり、導入されたスコーレム関数やスコーレム定項がそのモデルで真となるように定義されていなければならない、ということである。しかしそれは一般に不可能である。(例えば、$\exists x P(x)$ という論理式は、対応するスコーレム標準形として $P(\alpha)$(α はスコーレム定項) をもつ。ここで、$\mathcal{F}(P) = \{1\} \subseteq \mathcal{D}$ というモデルであれば $\exists x P(x)$ は真となるが、$\mathcal{F}(\alpha) = 2$ の場合は明らかに $P(\alpha)$ はそのモデルの元では偽となる。)

ではどうして「空節を導けば証明になるのだろうか？」この問題を解く鍵も今述べた『冠頭連言標準形の論理式が充足可能ならば、スコーレム標準形も充足可能、かつスコーレム標準形が充足可能ならば、それを導いた元の冠頭連言標準形の論理式も充足可能』ということにある。空節が導けたということは、前提 (P とする) の節集合と結論 (C とする) の否定の節集合が充足不能であることを意味する。これはどの P のモデルも C の否定を充足しない、すなわち「C の否定」は偽ということである。ここで『論理式は真か偽のどちらかを真理値としてとる』という大前提がある。「C の否定が偽」ということは「C が真」であることと同値なのである。故に結論が前提の論理的帰結であることが示される、ということなのである。(これにより、前提が矛盾していれば、何でも帰結される、ということに気がつくことであろう)

第 5 章

エルブラン領域 (Herbrand Universe)

ある論理式が恒真式（定理）であることを示すには、すべてのモデルで真であることを示さなければならない。つまり、あらゆる定義域と、あらゆる解釈に対して真であることを示さなければならない。また、ある論理式が充足不能（恒偽式）であることを示すには、あらゆるモデルで偽であることを示さなければならない。

実際、任意の論理式 ϕ が恒真式であることを示すことができれば、その否定である $\sim\phi$ が充足不能であることが示せる。その逆に、$\sim\phi$ が充足不能であることを示すことができれば、その否定である ϕ が恒真式であることが示せる。つまり、ある式が恒真であることを示すことと、その式に否定が一個付いた式が充足不能であることを示すことは同じことである。

しかし、実際問題としては、「論理式の充足不能性（恒偽性）」を示す方が簡単な場合がある。このことを利用して、これからは、「ある論理式が充足不能であること」をいかに効率的・機械的に調べるか、を議論する。

ある論理式が充足不能であることを示すには、今述べたように、あらゆるモデルにおいて充足不能であることを示さなければならない。そのために、あらゆる定義域を考えなければならない。しかし、一般に定義域は無限個の要素を持つ集合と考えられるから、ある論理式の充足不能性を調べる、ということはほとんど不可能な試みのように思える。

そこで、考え出されたのが、**エルブラン領域** (Herbrand universe) である。それぞれの論理式 (の節形式) に対して、以下に示すように、別個の領域が規定される。この領域は定義域としてみなされ、あらゆる可能な定義域を考えなくても、この領域だけを考えて充足不能性を調べればよいことがわかる。つまり、「この領域におけるあらゆる解釈を、その論理式に対応する節形式に対して調べる」ことで論理式の充足不能性が調べられるのである。

定義 5.1　**エルブラン領域** H(C)

1. 節集合 C ($=\{C_1,\ldots,C_n\}$) に現れる個体定項の集合を H_0 とする。もしも C 中に個体定項が現れなければ、任意の定項（例えば a）を用いて、$H_0=\{a\}$ とする。
2. $i=0,1,\ldots$ に対し、H_{i+1} を H_i から次のようにして作る。

   $$H_{i+1}=H_i\cup\{f(t_1,\ldots,t_n)\mid t_j\text{は }H_i\text{のすべての要素 }\}$$

   ここで、f は C に現れるすべての関数である。

3. H_∞ が求めるエルブラン領域である。

例 5.1　節集合 C = { P(x), Q(x,f(x)) } とすると、

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \{a\} \\
H_1 &= H_0 \cup \{f(a)\} = \{a, f(a)\} \\
H_2 &= H_1 \cup \{f(a), f(f(a))\} = \{a, f(a), f(f(a))\} \\
&\cdots \\
H_\infty &= \{a, f(a), \ldots, f(f(f(\cdots f(f(a))\cdots))), \ldots\}
\end{aligned}
$$

定義 5.2　**基礎例 (ground atom, ground instance)**

節集合 C 中の述語 $P(t_1, \ldots, t_n)$ の項 $t_1, \ldots, t_n$ に対し、エルブラン領域の要素を入れたものを基礎例と言う。
例。$C = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$ とすると、エルブラン領域は

$$\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$$

従って、その基礎例は以下のようなものである。

$$P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots$$

定義 5.3　**エルブラン基底集合 (Herbrand base) HB**

基礎例のすべての集合をエルブラン基底集合という。
例。$C = \{P(x) \vee Q(x), R(f(y))\}$ とすると、エルブラン領域は

$$\{a, f(a), f(f(a)), \ldots\}$$

従って、その基底集合は以下である。

$$HB = \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots\}$$

定義 5.4　**エルブラン解釈 (Herbrand Interpretation) HI**

節集合 C に対して、次の条件を満たすモデル $\mathcal{M} = \langle H(C), I\rangle$ を C のエルブラン解釈 HI という。

1. 任意の $a \in H_0(C)$ に対して、$I(a) = a$
2. C 中に現れる任意の関数 f と $t_1, \ldots, t_n \in H(C)$ に対して、
$$I(f)(I(t_1), \ldots, I(t_n)) = f(t_1, \ldots, t_n)$$
3. C 中の各 n 項述語 P^n に対しては
$$I(P^n) : H(C)^n \longrightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$
を考える。

具体的には、節集合 C に対するエルブラン基底集合を

$$HB = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$$

とすると、エルブラン解釈 HI は、

$$HI = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$$

と表現できる。ただし、B_i は A_i もしくは $\sim A_i$ である。
ここで、 $B_i = A_i$ とは、A_i が真であるという解釈、また $B_i = \sim A_i$ とは A_i が偽であるという解釈を意味する。

例 5.2 　$C = \{P(x) \vee Q(x), R(f(a))\}$ とすると、そのエルブラン解釈は

$$\begin{array}{rcl} HI_1 & = & \{P(a), Q(a), R(a), P(f(a)), Q(f(a)), R(f(a)), \ldots\} \\ HI_2 & = & \{\sim P(a), \sim Q(a), \sim R(a), P(f(a)), Q(f(a)), \ldots\} \\ HI_3 & = & \{P(a), Q(a), R(a), \sim P(f(a)), \sim Q(f(a)), \ldots\} \\ & & \ldots \end{array}$$

節集合 C の解釈は必ずしも C のエルブラン領域すべてに対し定義されている必要はない。すなわち、解釈は必ずしもエルブラン解釈である必要はない。例えば、$C = \{P(x) \vee Q(x), R(f(a))\}$ で、定義域 $\mathcal{D} = \{1, 2\}$ とすると、以下のものは C の解釈である。

$I(a) = 2$
$I(f(1)) = 2, I(f(2)) = 1$
$I(P(1)) = \mathbf{T}, I(P(2)) = \mathbf{F}$
$I(Q(1)) = \mathbf{F}, I(Q(2)) = \mathbf{T}$
$I(R(1)) = \mathbf{F}, I(R(2)) = \mathbf{T}$

定義 5.5　**モデルに対応するエルブラン解釈** I^*

$\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ をモデルとし、C を節集合とし、C に対するエルブラン領域を H とする。さらに、任意の項 $h_1, \ldots, h_n \in H$ に対し、どの h_i に対しても $I^*(h_i) = d_i$ なる $\mathcal{D}$ の要素が存在するとする。ここで、任意の n 項述語 P に対して、

$$I^*(P)(h_1, \ldots, h_n) = I(P)(d_1, \ldots, d_n)$$

で定められるエルブラン解釈 I^* を $\mathcal{M}$ に対応するエルブラン解釈という。

例 5.3 　論理式 $\forall x(p(x) \to q(f(x), a))$ を考えよう。このモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ を

- $\mathcal{D} = \{1, 2\}$
- $I(f(1)) = 2$, $I(f(2)) = 1$
- $I(p(1)) = \mathbf{T}$, $I(p(2)) = \mathbf{F}$
- $I(q) = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

で定義する。このとき、$\mathcal{M}$ に対応する I^* は、たとえば、

$I^*(p)(f(a)) = I(p)(I(f)(I(a))) = I(p)(2) = \mathbf{F}$
$I^*(q)(f(a), f(a)) = I(q)(I(f)(I(a)), I(f)(I(a))) = I(q)(2, 2) = \mathbf{T}$

のようにして定まる。

定理 5.1　モデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ が節集合 C を充足すれば、$\mathcal{M}$ に対応するエルブラン解釈 I^* もまた C を充足する。

証明

$C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ とすると、仮定より、任意の割り当て関数 g に対して、モデル $\mathcal{M}$ は $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$ を充足する。
ここで、I^* が C を充足しない、つまり $I^*(C_1 \wedge \ldots \wedge C_n) = \mathbf{F}$ であるとすると、ある C_i に対して、$I^*(C_i) = \mathbf{F}$ となる。従って、$C_i = l_{i1} \vee \ldots \vee l_{im}$ とすると、どのリテラル l_{ij}(j=1,. . . ,m) に対しても $I^*(l_{ij}) = \mathbf{F}$ である。そこで、C_i 中の変項 (これらは全称量化されていることに注意) を $y_1, \ldots, y_k$ とし、l_{ij} 中の変項を $x_1, \ldots, x_h$ とすると、任意の $t_1, \ldots, t_h \in H(C)$ に対して、

$$I^*(l)(t_1, \ldots, t_h) = \mathbf{F}$$

である。すると、I^* の定義より、

$$I^*(l)(t_1, \ldots, t_h) = I(l)(I(t_1), \ldots, I(t_h))$$

であるから、$t_1 \ldots, t_k \in H(C)$ に対しては、

$$I(C_i(t_1, \ldots, t_k)) = \mathbf{F}$$

となり、モデル $\mathcal{M}$ は C を充足しない。よって、仮定に反する。従って、I^* は C を充足する。

定理 5.2　節集合 C が充足不能であるための必要十分条件は、C がすべてのエルブラン解釈で偽となることである。

証明

節集合 C が充足不能であれば、C はあらゆる定義域の、あらゆる解釈に対して偽であるから、C がすべてのエルブラン解釈で偽となる。
一方、C がすべてのエルブラン解釈で偽であるとし、なおかつ、C が充足不能でないとする。すると、C を充足するモデル $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, I \rangle$ が存在する。そこで、このモデルに対応するエルブラン解釈 HI^* を考えると、定理 5.1 により、C は HI^* において真である。従って、HI^* は C を充足するので仮定に反する。故に C は充足不能である。

5.1　意味の木

前節の結果から、述語論理式の充足不能性を調べるには、エルブラン解釈だけを考慮すればよいことが明らかになった。つまり、すべてのエルブラン解釈で偽となることを調べ

れば良い。これを実現する一つの方法として、意味の木 (Semantic Tree) 法がある。

定義 5.6 **補 (complement)**

A を原子論理式 (atomic formula) とすると、A および $\sim A$ は互いに補リテラルという。
また、集合 $\{A, \sim A\}$ を相補対 (complementary pair) という。

定義 5.7 **意味の木 (Semantic Tree)**

C を節集合とし、A を C に含まれる原子論理式の集合とする。C に対する意味の木とは、どの枝に対しても A の要素、もしくはその否定からなる集合が付随しており、以下の条件をみたす木 T のことである。

i どのノード N に対しても、それから出る枝は高々有限個である。その枝を $L_1, \ldots, L_n$ とする。そして Q_i を L_i に付随する集合の要素 (リテラル) すべての連言とすると、$Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$ は恒真の命題である。

ii どのノード N に対しても、T の根から N までの (N を含む) 枝に付随している集合すべての和集合を $I(N)$ とする。すると、$I(N)$ にはどんな論理式の相補対も含まない。

定義 5.8 **完全 (complete) な意味の木**

$A = \{A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots\}$ を節集合 C に含まれる原子論理式の集合とする。C に対する意味の木が完全であるための必要十分条件は、その葉ノード (それから出る枝が存在しないようなノード)N それぞれに対し、$I(N)$ は $i = 1, 2, \ldots$ に対して A_i か $\sim A_i$ のいづれかを含む。

例 5.4 意味の木の例

1. $A = \{P, Q, R\}$ を節集合 C の原子論理式の集合とする。すると、図 5.1 は C に対する完全な意味の木である。
2. $C = \{P(x), P(a)\}$ とすると、C の原子論理式の集合は $\{P(a)\}$ である。また C に対する完全な意味の木は、図 5.2 のようになる。
3. $C = \{P(x), Q(f(x))\}$ とすると、C の原子論理式の集合は、

$$\{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \ldots\}$$

であり、C に対する意味の木は図 5.3 のようになる。

C に対する意味の木のどのノード N に対しても、$I(N)$ は C に対する解釈の部分集合になっているから、$I(N)$ のことを C に対する**部分解釈 (partial interpretation)** と呼ぶ。

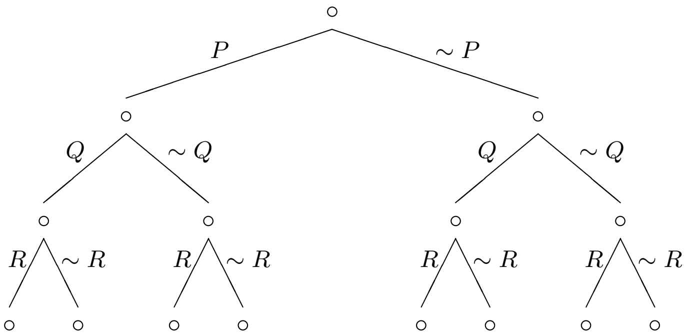

図 5.1　完全な意味の木の例

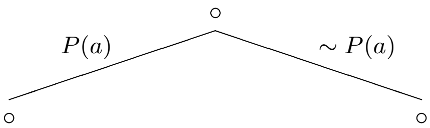

図 5.2　$C = \{P(x), P(a)\}$ に対する完全な意味の木

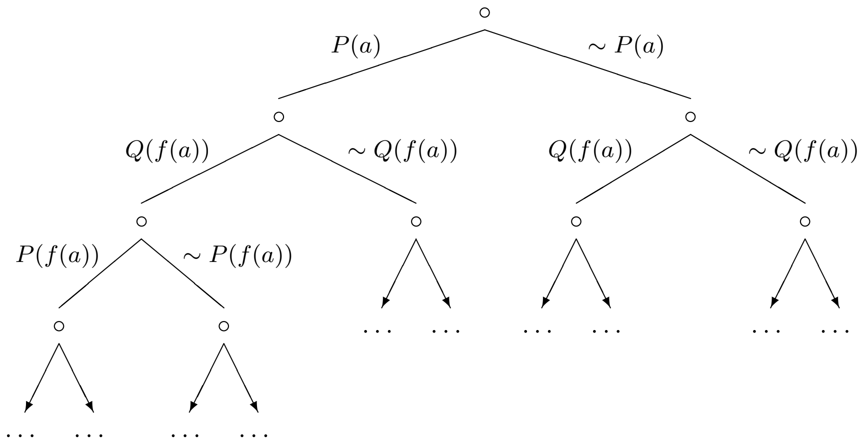

図 5.3　$C = \{P(x), Q(f(x))\}$ に対する意味の木

定義 5.9　失敗ノード (failure node)

ノード N が失敗ノードであるということは、$I(N)$ が C の節のある基礎例を偽にするが、N のどの先祖ノード N' に対しても $I(N')$ は C のどの基礎例も偽にしないことである。

定義 5.10　閉じた (closed) 意味の木

意味の木 T が閉じているための必要十分条件は、T のどのパスも失敗ノードで終端していることである。

定義 5.11　推論ノード (inference node)

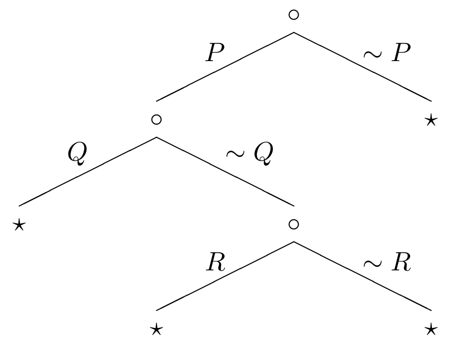

図 5.4　C に対する閉じた意味の木

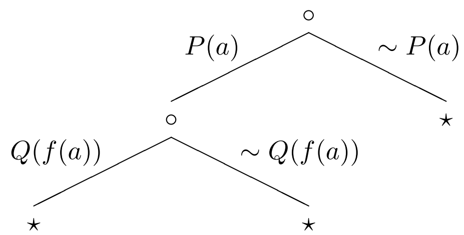

図 5.5　C に対する閉じた意味の木

閉じている意味の木 T のノード N が推論ノードであるとは、N の直接の子のノードすべてが失敗ノードであることである。

例 5.5　$C = \{P, Q \vee R, \sim P \vee \sim Q, \sim P \vee \sim R\}$ とする。C の原子論理式の集合 A は $A = \{P, Q, R\}$ である。図 5.4 は閉じた意味の木である。

例 5.6　$C = \{P(x), \sim P(x) \vee Q(f(x)), \sim Q(f(a))\}$ に対する原子論理式の集合は

$$A = \{P(a), Q(a), P(f(a)), Q(f(a)), P(f(f(a))), Q(f(f(a))), \ldots\}$$

であり、図 5.5 は C に対する閉じた意味の木である。

5.2　エルブランの定理

エルブランの定理は、定理 5.2 と密接な関係がある。すなわち、節集合 S が充足不能かどうかを示すには、S のエルブラン領域における解釈だけを考えればよいのである。もしも S がどのエルブラン領域にたいする解釈においても偽ならば、S が充足不能であると結論できる。しかしながら解釈はたくさん考えられる—おそらくは無限個あるので、何らかの体系的な方法で調べる必要がある。これは意味の木を用いて可能になる。

ここで二通りのエルブランの定理を提示する。文献でもっとも参照されるのは第 2 版の方である。

定理 5.3　**エルブランの定理 (第 1 版)**

節集合 S が充足不能であるための必要十分条件は、S に対応するどの完全な意味の木に対しても、有限で閉じた意味の木が存在する事である。

証明

($\Longrightarrow$): 節集合 S が充足不能と仮定し、T を S に対する完全な意味の木とする。T の根から葉へのそれぞれのパス B に対し、I_B をパス B のすべての枝に付随しているリテラルのすべてからなる集合とする。すると I_B は S に対する解釈となる。S は充足不能であるから、I_B は S のある節 C の基礎例 C' を偽にする。しかしながら、C' は有限であるから、パス B にはどこかに必ず失敗ノード N_B が存在する (根から有限の距離にある)。T のどのパスも失敗ノードをもつから、S には閉じた意味の木 T' が存在する。さらに、T' のそれぞれのノードは有限個の枝をもつから、T' は有限である (すなわち、T' のノードの個数も有限)。
($\Longleftarrow$): 逆に、S に対するどの完全な意味の木 T に対しても有限で閉じた意味の木 T' がある、すなわち T' のどのパスも失敗ノードをもつとする。これはどの解釈も S を偽にすることを意味する。したがって、S は充足不能である。

定理 5.4　**エルブランの定理 (第 2 版)**

節集合 S が充足不能であるための必要十分条件は、S の基礎例からなる有限で充足不能な集合 S' が存在する事である。つまり、S の変項にエルブランの領域の要素を対応して得られた基礎例の集合のうち、充足不能な集合 S' があれば、またその時に限り S は充足不能である。

証明

($\Longrightarrow$): S を充足不能とする。そして、T を S に対する完全な意味の木とする。するとエルブランの定理 (第 1 版) により、T に対応する有限な閉じた意味の木 T' が存在する。S' を T' の失敗ノードすべてで偽となる節の基礎例すべてからなる集合とする。すると、T' の失敗ノードの個数は有限なので、S' は有限である。S' はどの S' の解釈においても偽であるから、S' は充足不能である。
($\Longleftarrow$): S の基礎例の節からなる有限な充足不能な節集合 S' が存在するとする。S のどの解釈も S' の解釈 I' を含むから、I' が S' を偽とすれば、I も S を偽とする。しかしながら S' はどの解釈 I' によっても偽である。したがって、S' は S のどの解釈 I によっても偽である。ゆえに、S のどの解釈によっても S は偽である。故に S は充足不能である。

5.3　導出原理の完全性

本節では、導出原理が完全であること、すなわち、「節の有限集合」C が充足不能であるための必要十分条件が C から空節が導かれること、を証明する。

補題 5.1 **リフティング・レンマ (lifting lemma)**

節 C_1' と C_2' がそれぞれ C_1 と C_2 の基礎例であるとし、C' が C_1' と C_2' の導出節とすれば、C_1 と C_2 の導出節で C' を基礎例とするような C が存在する。

[証明]

C_1 と C_2 は変数を共有しないものとする（同じ変数を持つ場合は、変数名を付け替える)。L_1'、L_2' を導出に使う互いに補のリテラルとして、

$$C' = (C_1'\gamma - L_1'\gamma) \cup (C_2'\gamma - L_2'\gamma)$$

とする。ここで、γ は L_1' と $\sim L_2'$ との mgu とする。節 C_1' と C_2' がそれぞれ C_1 と C_2 の基礎例であるから、$C_1' = C_1\theta$ かつ $C_2' = C_2\theta$ なる置換 θ が存在する。$L_i^1, \ldots, L_i^{r_i}$ を L_i' に対応する C_i 中のリテラル (すなわち, $L_i^1\theta = \ldots = L_i^{r_i}\theta = L_i'$) とする ($i = 1, 2$)。また $r_i > 1$ ならば $\{L_i^1, \ldots, L_i^{r_i}\}$ に対する mgu を λ_i とし、$L_i = L_i^1\lambda_i$ とする ($i = 1, 2$)。この時は、L_i は C_i の因子 $C_i\lambda_i$ 中のリテラルである。もしも $r_i = 1$ ならば、$\lambda_i = \epsilon$ とし、$L_i = L_i^1\lambda_i$ とする。$\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$ とする。明らかに L_i' は L_i の例示である。L_1' と $\sim L_2'$ は単一化可能であるから、L_1 と $\sim L_2$ も単一化可能。σ を L_1 と $\sim L_2$ の mgu とし、

$$\begin{aligned} C = \quad & ((C_1\lambda)\sigma - L_1\sigma) \cup ((C_2\lambda)\sigma - L_2\sigma) \\ & ((C_1\lambda)\sigma - (\{L_1^1, \ldots, L_1^{r_1}\}\lambda)\sigma) \cup ((C_2\lambda)\sigma - (\{L_2^1, \ldots, L_2^{r_2}\}\lambda)\sigma) \\ & (C_1(\lambda \circ \sigma) - \{L_1^1, \ldots, L_1^{r_1}\}(\lambda \circ \sigma)) \cup (C_2(\lambda \circ \sigma) - \{L_2^1, \ldots, L_2^{r_2}\}(\lambda \circ \sigma)) \end{aligned}$$

とすると、C は C_1 と C_2 の導出節であり、

$$\begin{aligned} C' = \quad & (C_1'\gamma - L_1'\gamma) \cup (C_2'\gamma - L_2'\gamma) \\ & ((C_1\theta)\gamma - (\{L_1^1, \ldots, L_1^{r_1}\}\theta)\gamma) \cup ((C_2\theta)\gamma - (\{L_2^1, \ldots, L_2^{r_2}\}\theta)\gamma) \\ & (C_1(\theta \circ \gamma) - \{L_1^1, \ldots, L_1^{r_1}\}(\theta \circ \gamma)) \cup (C_2(\theta \circ \gamma) - \{L_2^1, \ldots, L_2^{r_2}\}(\theta \circ \gamma)) \end{aligned}$$

から、C' は C の基礎例である。

[導出原理の完全性の証明]

節集合 C が充足不能であるとする。$A = \{A_1, A_2, \ldots\}$ を C のエルブラン基底集合とすると、C に対して完全な意味の木を書くことができる。エルブランの定理 (第 1 版) によって、C が充足不能であることから、有限で閉じた木 T が存在する。この木 T の終端はすべて失敗ノードであるが、その中には必ず少なくとも一つの推論ノードがある。このノードを N とし、その下につながる失敗ノードを N_1, N_2 とする。すると木の根から N, N_1, N_2 までに至る道は、それぞれ一つのエルブラン解釈になっている。この道の各枝につけられたリテラルを m_i とすると、以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} I(N) &= \{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \\ I(N_1) &= \{m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}\} \\ I(N_2) &= \{m_1, m_2, \ldots, m_n, \sim m_{n+1}\} \end{aligned}$$

そしてあるノード c_{i1}, c_{i2} があって、c_{i1} の $I(N_1)$ による解釈 c_{i1}' は偽となり、c_{i2} の $I(N_2)$ による解釈 c_{i2}' も偽となる。c_{i1}', c_{i2}' は $I(N)$ では偽とならないから、c_{i1}' はリテラル $\sim m_{n+1}$ を含み、c_{i2}' は m_{n+1} を含んでいることになる。

そこで、

$$L_{i1}' = \sim m_{n+1}, L_{i2}' = m_{n+1}$$

とおくと、c'_{i1} と c'_{i2} とから L_{i1} と L_{i2} に関して

$$c'_i = (c'_{i1} - L'_{i1}) \vee (c'_{i2} - L'_{i2})$$

という形の導出節がつくり出される。すなわち、m_{n+1} の枝で偽となるのは、L'_{i1}, L'_{i2} であり、$(c'_{i1} - L'_{i1}) \vee (c'_{i2} - L'_{i2})$ は $I(N)$ で偽となる。
ここで、持ちあげ補題により、基礎例 c'_{i1}, c'_{i2} から導出節 c'_i が得られる時は、これに対応して節 c_{i1} と c_{i2} とから導出節 c_i が得られ、c'_i は c_i の基礎例になる。従って、節集合 C に導出節 c_i を加えた $C \cup \{c_i\}$ の節集合に対する閉じた意味の木を作ると、c_{i1}, c_{i2} の失敗ノードにいく前に、その推論ノードで c_i が失敗する。従って、この木のノードの個数は C に対する閉じた意味の木のノードの個数よりも少ない。そこで、この $C \cup \{c_i\}$ の節集合に対して同様のことを繰り返せば、最終的に木の根に空節 $\square$が得られる。これが C からの$\square$の帰結となる。
逆に C からの$\square$が導かれるとする。C が充足可能であるとすると、C に対してあるモデル $\mathcal{M}$ が存在することになる。このモデルは、C からの導出節を充足するが、$\square$は $\mathcal{M}$ は充足しないから、矛盾である。従って、C は充足不能である。

例 5.7　　次の節集合 S を考えてみよう。

1. P
2. $\sim P \vee Q$
3. $\sim P \vee \sim Q$

S の原子論理式集合は $\{P, Q\}$ である。T を図 5.6 に示すような完全な意味の木とする。T は図 5.7 に示すような閉じた意味の木 T' を持つ。この図のノード (2) は推論ノードである。その子ノード (4) と (5) は失敗ノードである。それぞれのノードで偽となる節は、ノード (4) では $\sim P \vee \sim Q$, ノード (5) では $\sim P \vee Q$ である。この二つのノードから、既に見たように、$\sim P$ という導出節が得られる。しかるに、これは、ノード (2) に対応する部分解釈によって偽となる。もしも $\sim P$ を節集合 S に付け加えれば、図 5.8 に示すような $S \cup \{\sim P\}$ に対応する閉じた意味の木 T'' が得られる。この図において、ノード (1) は推論ノードである。この時、P と $\sim P$ によって空節$\square$が得られる。この空節を $S \cup \{\sim P\}$ に付け加えれば、図 5.9 に示すような $S \cup \{\sim P\} \cup \{\square\}$ に対応する閉じた意味の木 T''' が得られる。このような意味の木の「縮退」は、以下のような導出節を得ることに対応していることに注意して欲しい。

$$\sim P$$

$$\square$$

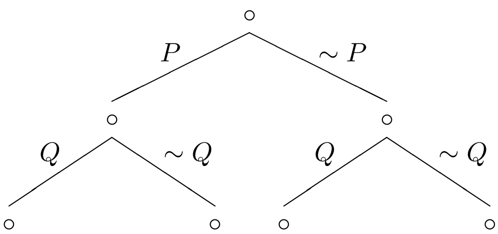

図 5.6　S に対する意味の木 T

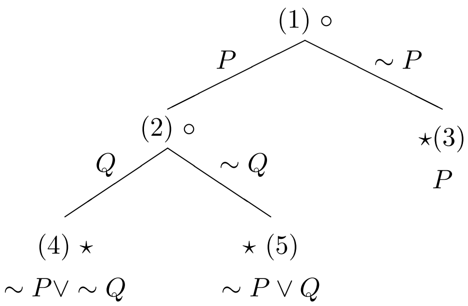

図 5.7　意味の木 T'

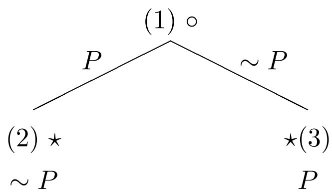

図 5.8　意味の木 T''

$\star$(1)

図 5.9　意味の木 T'''。空節を根とする木。

付録 A

集合に関する概念

「集合と関係」は「数理論理学」の基礎知識であるため、基本的な「集合と関係」の学習項目をまとめておく。

集合 互いに異なる対象の集まりを**集合** (set) という。逆に集合が与えられた時、その集合を構成する対象を、その集合の**要素**、もしくは**元** (member) という。

例:

- a,b,c を要素とする集合を $\{a, b, c\}$ と表す。
- 集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の要素は 1 と 2 と 3 と 4 と 5(計 5 個) である。

注意:

- 集合は、どのようなものがその要素か、だけが重要である。従って、$\{a, b, b, c\}$ のように同じ要素が重複してあるようなものは、同じ要素が重複しないような $\{a, b, c\}$ と同一とみなされる。
- 要素の間の順番は無視される。従って、$\{a, b, c\}$ は $\{c, b, a\}$ と同じ集合である。
- 集合 $\{a, \{1, 2, 3, 4\}, b, 5\}$ の要素は a と $\{1, 2, 3, 4\}$ と b と 5 だけである。
  注意: 1 や 2 はこの集合の要素とは考えない。

要素を持たない集合を**空集合**といい、$\{\}$ もしくは $\emptyset$ で表す。

注意:

- 空集合と、空集合を要素とする集合 $\{\emptyset\}$ とは異なる。
- 空集合をどの集合に対してもその要素と考えてしまう人がいるが、間違い。$\{a, b, \ldots, \emptyset, c, \ldots\}$ のように集合の中に空集合が要素として明示されている『場合』のみ、空集合は集合の要素となる。

集合の表し方:

- **外延的**定義: その要素をすべて書き下す方法。
  例: $A = \{a, b, c, d, e\}$
- **内包的**定義: 要素の条件を表す。
  例: $\{x \mid x$ は 7 以下の正整数 $\}$
  この例の場合、外延的定義では $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ となる。

内包的には書けるが外延的には書けない場合 (無限に要素があるような集合など) や、逆に外延的には書けるが内包的には定義し難い場合があることに注意。

集合と要素 a を要素、A を集合とすると、$a \in A$ は a が集合 A の要素であることを、$a \notin A$ は a が集合 A の要素でないことを表す。

集合の要素の個数の表し方: 集合 A の要素の個数を $\mid A \mid$ で表す。

要素の個数が有限個の場合、その集合を**有限集合**、無限個の場合は**無限集合**と呼ぶ。

例:

- 空集合の要素の個数は 0
- $\mid \{a, b, c\} \mid = 3$
- $\mid \{a, \{1, 2, 3\}, b, c\} \mid = 4$

部分集合　$A = \{a, b, c\}$ とすると、$\{a\}$、$\{a, b\}$、$\{c, a\}$ のように、その集合の要素全てが A の要素でもあるような集合を A の**部分集合**という。そして、$\{a\} \subseteq A$ や $\{c, a\} \subseteq A$ のように表す。

注意: 空集合および A 自身も A の部分集合と考える。(なぜそうなるのか、考えよう)

特に、A の部分集合であって A ではないような集合を、A の**真部分集合**といい、$\{a\} \subset A$ や $\{c, a\} \subset A$ のように表す。

注意:

- どんな集合 A も、A の真部分集合ではないが、その部分集合である。
- 論文／本によっては $\subset$ を $\subseteq$ として用いることがある。

積集合　集合 A, B に対し、$A \cap B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$ を A と B の**積集合** (もしくは**共通集合、交わり**,intersection) という。

例: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ とすると、$A \cap B = \{b, c\}$。

なぜなら集合 $\{b, c\}$ は A にも B にも含まれる要素だけからなる集合であり、しかもこの集合の要素以外に A にも B にも含まれる要素はないから。

和集合　集合 A, B に対し、$A \cup B = \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$ を A と B の**和集合** (もしくは**合併集合、結び**, union) という。

例: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ とすると、$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ である。

なぜなら、集合 $\{a, b, c, d, e\}$ は、A と B のどちらかに含まれる要素だけからなる集合であり、しかもこの集合の要素以外に A か B に含まれる要素はないから。

べき集合　集合 A に対し、A のすべての部分集合を要素とする集合を A の**べき集合** (power set) といい、$\wp(A)$ もしくは 2^A で表す。

例: $A = \{a, b\}$ とすると、A のべき集合 $\wp(A)$ は、$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ である。

注意: 任意の集合 X に対し、$\mid X \mid = n$ ならば、$\mid \wp(X) \mid = 2^n$ である (なぜか？)。

差集合　集合 A, B に対し、$A - B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$ を A と B の**差集合** (difference) という。

例: $A = \{a, b, c, f\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ とすると、$A - B = \{a, f\}$ である。また、$B - A = \{d, e\}$ である。

補集合　集合の要素の候補となる対象すべてからなる集合を**全体集合** (universe) という。全体集合 U が存在する時、集合 A に対し、集合 $U - A$ を集合 A の**補集合** (complement) といい、A^C、もしくは $\bar{A}$ で表す。

例: 全体集合 $U = \{a, b, c, d, e\}$、$A = \{a, b, c\}$ とすると、$A^C = \{d, e\}$ である。

注意: いつも全体集合が存在するとは限らない。全体集合が存在する場合について補集合が定義できる。

任意の集合 A,B に対し以下がなりたつ (ド・モルガン則):

- $(A \cup B)^C = (A^C \cap B^C)$
- $(A \cap B)^C = (A^C \cup B^C)$

付録 B

関係および関数に関する概念

順序対と組 a と b を対象とすると、$\langle a,b\rangle = \{a,\{a,b\}\}$ を a と b からなる**順序対** (ordered pair) という。そして、この場合 a を順序対 $\langle a,b\rangle$ の 1 番目の要素、b を順序対 $\langle a,b\rangle$ の 2 番目の要素という。

二つの順序対 $\langle x,y\rangle$ と $\langle u,v\rangle$ が等しくなる場合は、$x=u$ かつ $y=v$ の場合であり、かつその場合に限られる。

順序対の意味: 集合では、その要素が現れる順序は無視されるが、要素の順序が意味を持つ場合も多い。そこで、そのような順序を考慮した「集合のようなもの」を順序対とする。

注意:

- 一般に $\langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$

  注意: 「一般に」と断り書きするのは、$a=b$ ならば $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$ が成り立つからであるが、このような特殊な場合を除けば、$\langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$ である。
- 順序対を拡張して、要素を三つ、四つ ... と増やしたものが考えられる。三つ以上の要素を持つ順序対は**三つ組**、**四つ組**、...、n 項組といい、$\langle a,b,c\rangle$, $\langle a,b,c,d\rangle$, ...のように表す。そして、$\langle a,\ldots,b,c\rangle = \langle\langle a,\ldots,b\rangle,c\rangle$ として定義される。

デカルト積 集合 A と B に対し、

$$A \times B = \{\langle x,y\rangle | x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

を A と B との**デカルト積**もしくは**直積** (Cartesian product) という。

要するに、A から 1 番目の要素をとり、B から 2 番目の要素をとるというようにして作った順序対からなる集合のこと。

例: $A=\{a,b\}, B=\{1,2,3\}$ とすると、

- $A \times B = \{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle a,3\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle, \langle b,3\rangle\}$
- $B \times A = \{\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle, \langle 3,a\rangle, \langle 3,b\rangle\}$

注意:

- 一般に $A \times B \neq B \times A$
- $\mid A \times B \mid = \mid A \mid \cdot \mid B \mid$

n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots A_n$ に対して

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle \mid a_i \in A_i, i = 1, \ldots, n\}$$

を $A_1, A_2, \ldots, A_n$ のデカルト積という。特に $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ の場合、$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ を A^n と書く。

関係 集合 A と集合 B のデカルト積に対し、$R \subseteq A \times B$ を「A から B への二項関係 (binary relation)」という。特に、$R \subseteq A \times A$ の場合、「A 上の (二項) 関係」という。

例: $A = \{$ 太郎, 花子, 次郎 $\}$, $B = \{$ 朝日, 読売, 毎日, 日経, 中日 $\}$ (A は人間の集合、B は新聞の集合) とする。

- $A \times B$: 人間と新聞からなる順序対の集合
- 人間とその人が購読している新聞を以下のように表せる:
  $R_1 = \{\langle$ 太郎, 読売 $\rangle, \langle$ 花子, 朝日 $\rangle, \langle$ 花子, 毎日 $\rangle\}$
- 人間とその人が読んだことがある新聞の関係を以下のように表せる:
  $R_2 = \{\langle$ 太郎, 読売 $\rangle, \langle$ 太郎, 日経 $\rangle, \langle$ 花子, 朝日 $\rangle, \langle$ 花子, 読売 $\rangle, \langle$ 花子, 毎日 $\rangle, \langle$ 次郎, 中日 $\rangle\}$

R という関係が要素 a と b の間に成り立っている時、Rab、もしくは $R(a,b)$、もしくは aRb と書くことがある。

$R \subseteq A \times B$ に対し、

- $\{x \mid \langle x, y\rangle \in R$ となる $y \in B$ が存在 $\}$ を関係 R の**定義域** (domain) という。
  例: R_1 の定義域は $\{$ 太郎, 花子 $\}$
- $\{y \mid \langle x, y\rangle \in R$ となる $x \in A$ が存在 $\}$ を関係 R の**値域** (range) という。
  例: R_1 の値域は $\{$ 朝日, 読売, 毎日 $\}$

関数 関係 $f \subseteq A \times B$ が「A から B への関数」でもある場合は、以下の二つの条件がともに成り立つ時に限られる。また、このとき、$f : A \mapsto B$ と書く。

1. f の定義域は A に等しい (全射)。
2. f の定義域中のどの要素 x に対しても、$y \in B$ かつ $\langle x, y\rangle \in f$ なる y がちょうど一個だけ存在する (単射)。

注意: 「写像」、「対応」という用語は、「関数」と同じ意味で用いられる。

f が集合 A から B への関数であり、$\langle a, b\rangle \in f$ ならば、$f(a) = b$ と書くことがある。また、この時、a を f の引数 (argument)、b を $f(a)$ の値 (value) または像 (image) という。

例: $A = \{$ 太郎, 花子, 次郎 $\}$、$B = \{$ 男, 女, 中性 $\}$ とする。

- $f_1 = \{\langle$ 太郎, 男 $\rangle, \langle$ 花子, 女 $\rangle, \langle$ 次郎, 中性 $\rangle\}$ は関数。
- $f_2 = \{\langle$ 太郎, 男 $\rangle, \langle$ 花子, 女 $\rangle, \langle$ 次郎, 男 $\rangle\}$ も関数。
- $f_3 = \{\langle$ 太郎, 男 $\rangle, \langle$ 花子, 女 $\rangle\}$ や $f_4 = \{\langle$ 太郎, 男 $\rangle, \langle$ 太郎, 女 $\rangle, \langle$ 花子, 女 $\rangle, \langle$ 次郎, 男 $\rangle\}$ は関数ではない。(関係ではある)

一般に、n 個の集合 $A_1, A_2, \ldots A_n$ のデカルト積 $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ から集合 B への関数 f を n 変数関数もしくは n 引数関数 (または n 項関数) という。そして、$x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, …, $x_n \in A_n$、$y \in B$ とし、$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y\rangle \in f$ ならば、$f(x_1, \ldots, x_n) = y$ と表すことがある。

また、集合 A に対して

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

なる関数 $\chi_A \mapsto \{0,1\}$ を A の特性関数 (characteristic function) という。見て分かるように、集合 A を定めることと A の特性関数を定めることは等価である (が異なる集合である)。

関係の性質　様々な性質をもつ関係を作ることができる。そのような性質として主要なものだけをあげる。

1. 反射性 (reflexivity): 集合 A と、A における関係が与えられた時、R が**反射的**であることの必要十分条件は、A のどの要素 x に対しても、$\langle x,x\rangle$ が R の要素である、すなわち $\langle x,x\rangle \in R$ であることである。
2. 対称性 (symmetry): 集合 A と、A における関係が与えられた時、R が**対称的**であることの必要十分条件は、A のどの要素 x,y に対しても、$\langle x,y\rangle$ が R の要素であれば $\langle y,x\rangle$ も R の要素である、ということである。
3. 推移性 (transitivity): 関係 R が**推移的**であるための必要十分条件は、R の要素である、どの $\langle x,y\rangle$, $\langle y,z\rangle$ という対に対しても、それらが R の要素であれば、$\langle x,z\rangle$ もまた R の要素であることである。
4. 連結性 (connectedness): A における関係 R が**連結的**であるための必要十分条件は、A のどの二つの要素 x,y に対しても、$\langle x,y\rangle \in R$、もしくは、$\langle y,x\rangle \in R$ のどちらかが成り立つことである。
5. 同値関係 (equivalence): 関係 R が反射的、対称的、推移的である時、R を**同値関係**と呼ぶ。

   この同値関係により、集合の要素を、互いに異なる集合に分けることができる。こうして分けられた部分集合を**同値類** (equivalence class) という。

グラフ　グラフ (graph) は集合を用いて次のように定義される:

グラフ $G = (V,E)$ は頂点の有限集合 V と辺の集合 E からなる。辺が頂点の順序対 $\langle v,w\rangle$ で与えられる場合、そのグラフを有向グラフと呼び、辺が互いに異なる頂点の集合 v,w で与えられる場合、そのグラフを無向グラフと呼ぶ。

例: 図 B.1 に示されたグラフは頂点集合 $\{1,2,3,4\}$、辺の集合 $\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle\}$ のグラフとして定義される。

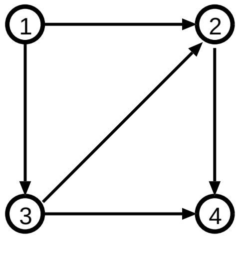

図 B.1　(有向) グラフの例

演習 B.1　「集合と関係」に関する演習問題

1. $A = \{a,b,c,1,2,3,4\}$、$B = \{a,b\}$、$C = \{c,1,2\}$、$D = \{a,b,c\}$、$E = \{a,b,\{c\}\}$、$F = \{\}$、$G = \{\{a,b\},\{c,1,2\}\}$ とする。

以下のものの正誤を答えよ。

(a)	$c \in A$	(g)	$D \subset A$	(m)	$B \subseteq G$
(b)	$c \in F$	(h)	$A \subseteq C$	(n)	$\{B\} \subseteq G$
(c)	$c \in E$	(i)	$D \subseteq E$	(o)	$D \subseteq G$
(d)	$\{c\} \in E$	(j)	$F \subseteq A$	(p)	$\{D\} \subseteq G$
(e)	$\{c\} \in C$	(k)	$E \subseteq F$	(q)	$G \subseteq A$
(f)	$B \subseteq A$	(l)	$B \in G$	(r)	$\{\{c\}\} \subseteq E$

2. 任意の集合 S に対して
   (a) S は $\{S\}$ の要素か？
   (b) $\{S\}$ は $\{S\}$ の要素か？
   (c) $\{S\}$ は $\{S\}$ の部分集合か？
   (d) $\{S\}$ を唯一の要素とする集合を答えよ。
3. $A = \{a, b, c\}$、$B = \{1, 2\}$ とする。
   (a) それぞれの集合を求めよ。

(i)	$A \times B$	(iv)	$(A \cup B) \times B$
(ii)	$B \times A$	(v)	$(A \cap B) \times B$
(iii)	$A \times A$	(vi)	$(A - B) \times (B - A)$

   (b) 以下のような A から $(A \cup B)$ への関係 R の定義域と値域を答えよ。
$$R = \{\langle b, b\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 1\rangle, \langle c, 2\rangle\}$$
4. 関数ではない関係の例を二つ挙げよ。そしてそれがなぜ関数でないかを答えよ。
5. $A = \{a, b, c\}$ とし、A から $\{T, F\}$ への関係 R_1 を、$R_1 = \{\langle a, T\rangle, \langle b, F\rangle\}$、$A \times A$ から $\{T, F\}$ への関係 R_2 を $R_2 = \{\langle\langle a, a\rangle, T\rangle, \langle\langle a, b\rangle, T\rangle, \langle\langle b, a\rangle, F\rangle, \langle\langle b, b\rangle, F\rangle\}$ とする。
   R_1 と R_2 のそれぞれの補集合を求めよ。
6. $A = \{a, b, c, d, e\}$、$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ とする。
   (a) A と B に対し、それぞれの部分集合の個数を答えよ。
   (b) $A \mapsto \{T, F\}$ という関数は何とおり考えられるか?また、$B \mapsto \{T, F\}$ という関数は何とおり考えられるか?
   (c) $A \times A \mapsto \{T, F\}$ という関数は、何とおり考えられるか? また $B \times B \mapsto \{T, F\}$ という関数は、何とおり考えられるか?
7. 図 B.2 で表されるグラフを定義せよ。
8. 図 B.2 で表されるグラフにおいて、辺と辺の間の関係 R を以下のように定める。ただし**閉路**とは、同じ頂点から始まって同じ頂点で終るような辺の列 $\langle v_1, v_2\rangle, \langle v_2, v_3\rangle, \ldots, \langle v_n, v_1\rangle$ のことである。
   - どの辺 e にたいしても、$R(e, e)$ である。
   - どの辺 e_1 と e_2 の組合せに対しても、この両方を含む閉路が存在するならば、$R(e_1, e_2)$ である。

   このように定義された関係 R が同値関係であることを示せ。
9. 図 B.2 で表されるグラフの辺の集合を、前問で定義された関係 R で同値類に分割せよ。
   ヒント: 二つの異なる辺が、ある同値類 E_i に属することと、それらが E_i に属す辺の集合によって構成される同じ閉路の上にあることが同値であることを使う。

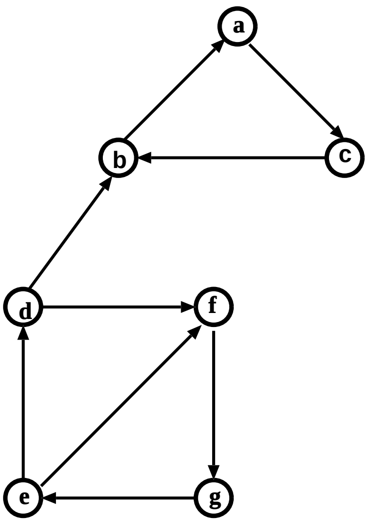

図 B.2　有向グラフ

付録 C

ツェルメロ・フレンケル (ZF) 集合論

等号 (=) についての公理

1. $\forall x x = x$
2. $\forall x \forall y (x = y \to y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \to x = z)$
4. $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge z \in x \to z \in y)$
5. $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge x \in z \to y \in z)$

等号公理に基づいて、ツェルメロ・フレンケル (ZF) 集合論は以下で与えられる。ただし、選択公理 (C と表される) を含んでも含まなくても無矛盾な公理系となることが知られている。そこで、公理系 (I)〜(VIII) を ZF、公理系 (I)〜(IX) を ZFC、と呼ぶ。

I 外延公理: 集合はその要素により決定される

$$\forall x \forall y [x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y)]$$

II 対公理: x,y が集合の時、x と y だけを要素として持つ集合 z が存在する。

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \vee t = y)$$

III 和集合公理: 集合を要素とする集合が与えられると、これらの (要素となっている) 集合の要素を要素とする集合が存在する

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow \exists u (u \in x \wedge z \in u)]$$

IV 巾 (べき) 集合公理: 集合が与えられると、その部分集合を要素とする集合が存在する

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow z \subseteq x]$$

V 空集合公理: 要素を持たない集合が存在する

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

このような集合は一意的なのでこれを空集合といい、ϕ で表す。

$$\forall y (y \notin \phi)$$

VI 無限公理: 無限個の要素をもつ集合が存在する

$$\exists a[\phi \in a \wedge \forall x(x \in a \rightarrow x \cup \{x\} \in a)]$$

VII 置換公理図式: $\varphi(x, y)$ は、z, v を自由変数として含まず、他の変数を含む場合はその変数は全称量化された論理式とする

$$\forall x \exists y \forall z[\varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z] \rightarrow \forall u \exists v \forall y[y \in v \leftrightarrow \exists x \in u \varphi(x, y)]$$

VII' 分出公理図式: $\psi(x)$ は v を自由変数として含まない論理式とする

$$\forall u \exists v \forall x(x \in v \leftrightarrow x \in u \wedge \psi(x))$$

VIII 正則性公理 (基底公理): 空でない集合はそれ自身との交わらない要素を含む

$$\forall a[a \neq \phi \rightarrow \exists x(x \in a \wedge x \cap a = \phi)]$$

IX 選択公理: 二つずつ互いに素な空でない集合を要素とする集合 z が与えられていれば、これに対し、次の条件を満たす集合 u が存在する: u は z に属する各集合とちょうど一点を共有する。

$$\forall z[\forall x(x \in z \rightarrow x \neq \phi) \wedge \forall x \forall y(x \in z \wedge y \in z \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \phi) \rightarrow \exists u \forall x(x \in z \rightarrow \exists t(u \cap x =$$

付録 D

談話表示理論について

本章の内容は、以下にあげる文献に基づく。

1. 白井賢一郎 (1991) 『自然言語の意味論 』第 4 章. 産業図書.
2. Kamp, H. & Ryle, U. (1993). *From Discourse to Logic.* Kluwer.
3. Asher, N. (1993). *Reference to Abstract Objects in Discourse.* Kluwer.

ここで取り上げる談話表示理論（DRT, Discourse Representation Theory) は Hans Kamp によって 1980 年頃に提案された「談話の意味を表現する」ための理論である。その名前が意味するように、文脈と文の意味内容との関係を明示的に表示[*1]することで、意味解釈の動的な側面を研究することに強調が置かれている。ここで「明示的」というのは、文脈の表示や、文の意味内容の表示の方式が規定されること、またその表示の真理条件を規定する「世界」との関係が規定されることを意味する。

文の意味を文脈から文脈への関数と考え、以下の二つの段階に分けて分析する。

1. 談話表示構造 (DRS, Discoure Representation Structure) の構築手続き: ある時点の文脈を K_i で表すと、文 S_i の発話によって新たな文脈 K_{i+1} が構成される。この時、文 S_i の発話の意味内容は文脈 K_i の下で決定される。そして文脈 K_i にその発話の意味内容を組み込んだものが新たな文脈 K_{i+1} であると考える。
2. 真理条件: 世界のモデルに談話表示構造が「適切に埋め込める」かどうかの手続きを与える。

談話表示構造の構築手続きと真理条件を結合することで、文脈に対する動的な真理条件的解釈が可能になる。

談話表示構造 (以後、DRS と呼ぶ) は聞き手が談話を解釈する際に構築する情報に対応する構造であり、コミュニケーションと情報の理論に特別な役割を果たすものと位置付けられる。

D.1 基本的要素

図 D.1 は文 (1) に対する DRS(ただし時制は除く) と考えられる。

[*1] 英語にすれば represent であるが、言語学では「表示」、心理学では「表象」、工学では「表現」という言葉があてられる。

(1) A boy kicked Fred.

(K1)

x,y
boy(x) Fred(y) kick(x,y)

図 D.1　文 (1) に対する DRS

(K1) は DRS を図的に表現したものである。DRS は領域 (universe) と呼ばれる指示標識[*2]の集合と、条件[*3]の集合の順序対とから構成され、$\langle U_K, Con_K \rangle$ と表される。

(K1) の場合は、x, y の集合が U_K である。また、x や y がどのような性質を持っているか、また x と y の間にどのような関係が成り立つかを表している $\{boy(x), Fred(y), kick(x,y)\}$ という条件集合が Con_K となる。

(K1) の真理条件は、(K1) が世界のモデルにおいて「適切な埋め込み」(proper embedding) を持つこと、すなわちモデルにおいて x や y に対応する個体が存在し、それぞれの個体が Con_K で記述された条件を満たしていることである。

次は二個の文からなる例である。(1) にさらに一文付け加えて、談話を構成している。

(2) A boy kicked Fred. Fred cried.

最初の文は (K1) という構造を与える。この構造が、二番目の文の解釈のための文脈を提供する。二番目の文の処理では、そこで導入される指示標識や条件が、一番目の文によって作られた構造に挿入される。DRS の有効性は代名詞などの照応表現の扱いにみること

(K2)

x,**y**,**z**
boy(**x**) Fred(**y**) kick(**x**,**y**) Fred(**z**) cry(**z**)

図 D.2　談話 (2) に対する DRS

ができる。照応表現は他の指示標識と関係づけられる特殊な条件を導入する。それを z = ? のように書くことにする。このような条件を不完全条件と呼ぶ。(これに対し、他の種類の条件は完全条件という。)

文 (3) の代名詞 *he* によって不完全条件が導入される。

[*2] 指示標識 (discourse referents) は一階述語論理における変項に相当するが、もっと認知的な要素である。

[*3] 条件 (conditions) は論理式に相当する。

(3) A boy kicked Fred. He cried.

(K3)

x,**y**,**z**
boy(**x**)
Fred(**y**)
kick(**x**,**y**)
z = ?
cry(**z**)

図 D.3　談話 (3) に対する DRS

図 D.3 で導入された疑問符は適切な指示標識で置き換えられ、「完全な」DRS に作りかえられる。ここで **y** が適切な指示標識とすれば、(K3) は図 D.4 にあげるような「完全な」DRS が得られる。条件には、その要素として DRS を含むものもある。これを複合条件

(K'3)

x,**y**,**z**
boy(**x**)
Fred(**y**)
kick(**x**,**y**)
z = **y**
cry(**z**)

図 D.4　補完された DRS

(complex condition) という。(4) は複合条件を生み出す例である。

(4) Every girl kicked Fred.

(K4)

$$\begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \begin{array}{|l|}\hline \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{girl(x)} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l|}\hline \mathrm{y} \\ \hline \mathrm{Fred(y)} \\ \mathrm{kick(x,y)} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

図 D.5　談話 (4) に対する DRS

また否定も複合条件を生み出す。文 (5) は (K5) にあげる条件を生成する。

(5) John does not like Fred.

(K5) は『**x** が John で **y** が Fred で、**x** が **y** を好きである』というようなことを満たす **x** と **y** がなければ、モデルに対し適切に埋め込むことができる。

(K5)

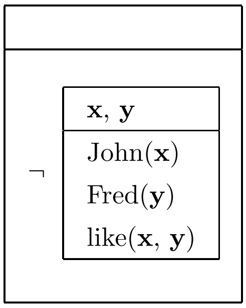

図 D.6　(5) に対する DRS

D.2　基本的な構成手続き

DRS 構成手続きは、文ごとに談話に対する DRS を構築していく。実際の入力は文の構文木を仮定する。例として文 (1) を考えよう。

(1)　A boy kicked Fred.

これは図 D.7 のような構造をもっていると考えられる。

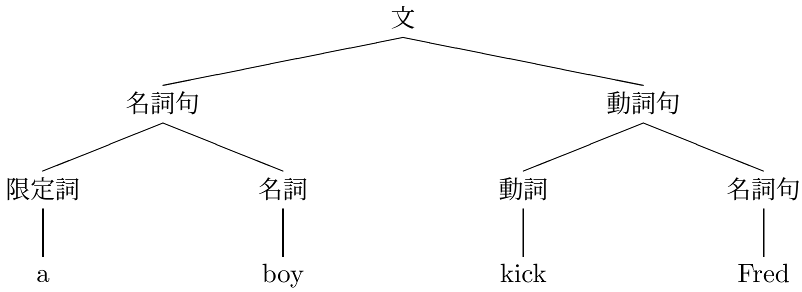

図 D.7　文 (1) の構文木

(K1) を構築するのに、ここでは構文木の下から次々と作り上げて行くことを考える。そのために『述語的 (predicative) DRS』を定義する。

定義: 述語的 DRS　$x_1, \ldots x_n$ を変数とし、K を DRS とし、$y_1, \ldots, y_n \in U_K$ とすると、

$$\lambda x_1, \ldots, x_n \langle (U_K - \{y_1, \ldots, y_n\}), Con_K(x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n) \rangle$$

を述語的 DRS という。

これにより、*boy* のような名詞や *walk* のような自動詞はそれぞれ次のように一個変数を持つ述語的 DRS で表現される。

(6)　a. ‘boy’: $\lambda x \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \mathrm{boy}(x) \\ \hline \end{array}$

b. ‘walk’: $\lambda x \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \mathrm{walk}(x) \\ \hline \end{array}$

また、*kick* や *like* のような他動詞は二個以上の変数をもつ述語的 DRS で表現される。

(7) a. ‘kick’: $\lambda x \lambda y \begin{array}{|l|}\hline \phantom{\text{kick}(x,y)} \\ \hline \text{kick}(x,y) \\ \hline \end{array}$

b. ‘like’: $\lambda x \lambda y \begin{array}{|l|}\hline \phantom{\text{lik}(x,y)} \\ \hline \text{lik}(x,y) \\ \hline \end{array}$

λ は DRS において指示標識を取り去り、それらを抽象化した『操作』を表す記号である。これにより、何かしらの指示標識が与えられれば、それと述語的 DRS を組み合わせることにより、DRS を構成することができる。

一方、限定詞は部分的 DRS を導入する。部分的 DRS は DRS から述語的 DRS をいくつか取り除いて抽象化したものとみなすことができる。以下は *a* が導入する部分的 DRS である。ここで P, Q は述語的 DRS である。また指示標識 **u** は述語的 DRS と組み合わされて条件をつくり出すための指示標識であり、この部分的 DRS が導入される文脈を表す DRS において新規である、という意味で特殊である。

(8) ‘a’: $\lambda P \lambda Q \begin{array}{|l|}\hline \mathbf{u} \\ \hline \text{P}(\mathbf{u}) \\ \text{Q}(\mathbf{u}) \\ \hline \end{array}$

Fred のような固有名詞も部分的 DRS を導入する。

(9) ‘Fred’: $\lambda P \begin{array}{|l|}\hline \mathbf{v} \\ \hline \text{Fred}(\mathbf{v}) \\ \text{P}(\mathbf{v}) \\ \hline \end{array}$

これらにより文 (1) に対する DRS が構成される手続きを述べる。まず、(8) と (6) から *a boy* に対応する、次のような部分的 DRS が構成される。

(10) ‘a boy’: $\lambda Q \begin{array}{|l|}\hline \text{u} \\ \hline \text{boy(u)} \\ \text{Q(u)} \\ \hline \end{array}$

また (7) と (9) から *kicked Fred* に対応する、次のような部分的 DRS が構成される。

(11) ‘kicked Fred’: $\lambda x \begin{array}{|l|}\hline \text{v} \\ \hline \text{Fred(v)} \\ \text{kick}(x,\text{v}) \\ \hline \end{array}$

これらから文 (1) に対応する構造 (K1) が得られるのである。

(K1)

x,**y**
boy(**x**)
Fred(**y**)
kick(**x**,**y**)

今度は談話 (3) を考えて見よう。

(3)　A boy kicked Fred. He cried.

代名詞 *he* は以下のような部分的 DRS を導入する。

(12) ‘he’: λP

z
P(z)
z = ?

これにより、*He cried.* から以下のような DRS が構成される。

(13)

z
cry(z)
z = ?

これは (K1) を文脈として新たな DRS を構成する。ここで DRS 更新 (DRS-update) を定義する。

定義: DRS 更新　K_1 および K_2 を DRS とすると、K_1 と K_2 の DRS 更新とは、

$$\langle (U_{K_1} \cup U_{K_2}), (Con_{K_1} \cup Con_{K_2}) \rangle$$

のことである。これを $K_1 \underline{\cup} K_2$ とあらわす。

これらから以下のような (不完全な)DRS が得られる。

(14)

x,**y**, **z**
boy(**x**)
Fred(**y**)
kick(**x**,**y**)
cry(**z**)
z = ?

照応表現の指示対象の解消は DRS 構築手続きとは別に行なう。

複合条件を生み出す要素として、限定詞 *very* や文接続詞 *if . . . then . . .* がある。

文接続詞 *if . . . then . . .* は次のような部分的 DRS を導入する。

(15) ‘if ... then ...’: $\lambda P \lambda Q$

$$\begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \begin{array}{|l|}\hline \quad \\ \hline \mathrm{P} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l|}\hline \quad \\ \hline \mathrm{Q} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

限定詞 *every* は次のように、上とは少し異なる部分的 DRS を導入する。

(16) ‘every’: $\lambda P \lambda Q$

$$\begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \begin{array}{|l|}\hline \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{P(x)} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l|}\hline \quad \\ \hline \mathrm{Q(x)} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

例として、(4) を考えよう。

(4)　Every girl kicked Fred.

every girl によって以下のような部分的 DRS が導入される。

(17) ‘every girl’: λQ

$$\begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \begin{array}{|l|}\hline \mathrm{x} \\ \hline \mathrm{girl(x)} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l|}\hline \quad \\ \hline \mathrm{Q(x)} \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

これと (11) に示される *kicked Fred* に対応する部分的 DRS と結合して (K4) の DRS 構造が得られる。

(K4)

$$\begin{array}{|c|}\hline \quad \\ \hline \begin{array}{|l|}\hline \mathbf{x} \\ \hline \mathrm{girl}(\mathbf{x}) \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l|}\hline \mathbf{y} \\ \hline \mathrm{Fred}(\mathbf{y}) \\ \mathrm{kick}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array}$$

注意すべきことは、それぞれの単語に一意的な (部分的および述語的)DRS 構造を割り当て、それらの組合せによって文や談話に対応する DRS を構築しようとしていることである。

次に、照応表現の扱いを考える。DRS 構造の構築手続きでは、照応表現が実際に何を指示するかは決定できない。しかし、それが指示する対象の範囲をせばめる (制約する) ことが DRS 構造の性質から導ける。

定義: 従属 (subordination)　DRS K が DRS K' に従属するとは以下のいずれかが成り立つ場合である。

1. K が K' の (複合) 条件の構成素である。
2. K が K'' の (複合) 条件の構成素であり、K'' が K' に従属している。

定義: 到達可能性 (accessibility, アクセス可能性)　DRS K は DRS K_0 に等しいか、K_0 に従属しているとする。このとき指示標識 y が K_0 において指示標識 x に到達可能であるとは、以下のいずれかが成り立つ場合である。

1. $x \in U_K$ であり、$y \in U_{K_0}$ のとき。
2. $y \in U'_K$、$x \in U_{K''}$、かつ $K' \Rightarrow K''$ のとき。

それ以外の場合は、y は K_0 において指示標識 x に到達可能ではない。

簡単にいえば、照応表現が指示する対象に当たる指示標識は、それが到達可能な指示標識のなかから一致するものを探さなければならないという制約を持つ。この例を見てみよう。

(18) If a student owns a BMW, he drives it every day.

この文は以下のような DRS を生み出す。

(19)
$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \begin{array}{|l|}\hline \text{x, y} \\ \hline \text{student(x)} \\ \text{BMW(y)} \\ \text{own(x,y)} \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l|}\hline z_1,\ z_2 \\ \hline z_1 = ? \\ z_2 = ? \\ \text{drive-every-day}(z_1,z_2) \\ \hline\end{array} \\ \hline\end{array}$$

ここで z_1 =? および z_2 =? を完全化するための候補は、これらに到達可能な指示標識の集合 $\{x, y\}$ の要素であることから、最終的に次のような DRS が得られる。

(20)
$$\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \begin{array}{|l|}\hline \text{x, y} \\ \hline \text{student(x)} \\ \text{BMW(y)} \\ \text{own(x,y)} \\ \hline\end{array} \Rightarrow \begin{array}{|l|}\hline z_1,\ z_2 \\ \hline z_1 = \text{x} \\ z_2 = \text{y} \\ \text{drive-every-day}(z_1,z_2) \\ \hline\end{array} \\ \hline\end{array}$$

逆にこの制約は以下のような文が許容できないことを説明する。ここで BMW_i と it_i のように同じ下つき添字を持つものは、同一指示として解釈することを示すものとする。

(21) a. * Every man who owns every BMW_i likes it_i.
b. * Every man who owns every BMW_i praises it. It_i runs very well.
c. * No girl_i slept. She_i was then very cross.
d. * Fred does not own a car_i. It_i runs very well.

D.3　談話表示構造の解釈

談話から構成規則により求められた談話表示構造 (DRS) は、以下のようにして真理値が決定される。

まず、述語論理と同様、世界のモデル $\mathcal{M}$ を考える。

(22) モデル: $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{F} \rangle$

ここで、$\mathcal{U}$ はモデルの領域、$\mathcal{F}$ は解釈関数である。$\mathcal{U}$ は述語論理における個体集合、$\mathcal{F}$ は述語論理の解釈関数に対応する。

談話表示構造 $\langle X, C \rangle$(X は指示標識の部分集合、C は条件の集合) は、このモデルの「部分的な」記述と考えることができる。そして、実際にその記述がこのモデルに適合すれば、その談話表示構造は世界に合致する、すなわち「真」であるとみなせる。これを形式的にいえば、次のようにいうことができる。

(23) 談話表示構造 K がモデル $\mathcal{M}$ において真:
談話表示構造 K がモデル $\mathcal{M}$ において真であるのは、集合 $\mathcal{U}_K$ から集合 $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ への適切な埋め込み関数 f が存在する場合である。

ここで、「埋め込み関数」とは、以下のように規定される。

(24) 埋め込み関数 f
談話表示構造 K に対するモデル $\mathcal{M}$ での埋め込み関数は、$\mathcal{U}_K$ の各要素を $\mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ の要素に写像する関数である。

ここで三つほど用語の定義をする。

(25) 埋め込み関数 f の拡張 g
f が K に対する $\mathcal{M}$ での埋め込み関数であり、$g : Dom(f) \cup \mathcal{U}_{K_1} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ ならば、g を埋め込み関数 f の、談話表示構造 K_1 の埋め込みへの拡張と呼び、$g \supseteq_{K_1} f$ で表す。

(26) $[f, K]^{\mathcal{M}} = 1$
埋め込み関数 f が談話表示構造 K のモデル $\mathcal{M}$ への**適切な埋め込み**であることを表す。

(27) $\mathcal{M} \models_{f,K} \phi$
モデル $\mathcal{M}$ が談話表示構造 K に対する埋め込み関数 f のもとで条件 ϕ を**満足する**、ことを表す。

「埋め込み関数 f が談話表示構造 K のモデル $\mathcal{M}$ への適切な埋め込み」の定義と、「モデル $\mathcal{M}$ が埋め込み関数 f のもとで条件 ϕ を満足する」の定義とは、相互に依存しているので分かりにくいかもしれないが、一種の再帰的な定義と考えて欲しい。

(28) $[f, K]^{\mathcal{M}} = 1$ であるのは、どの K の条件 ϕ(すなわち $\phi \in Con_K$) に対しても $\mathcal{M} \models_{f,K} \phi$ の場合である。

ここで、$[g, K]^{\mathcal{M}}_f = 1$ の定義を以下のように定める。

(29) $[g, K]^{\mathcal{M}}_f = 1$ のための条件は、
1. $g \supseteq_K f$
2. すべての $\phi \in Con_K$ に対して、$\mathcal{M} \models_{g,K} \phi$

これらにより、モデル $\mathcal{M}$ が談話表示構造 K に対する埋め込み関数 f のもとで条件 ϕ を満足することの定義は以下で与えられる。

(30) (a) ϕ が $\alpha(x)$ の形式の条件 (x は指示標識、α は自動詞や普通名詞など) の時、$f(x) \in \mathcal{F}(\alpha)$ ならば $\mathcal{M} \models_{f,K} \phi$ である。

(b) ϕ が $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ の形式の条件 ($x_1, \ldots x_n$ は指示標識、α は n 項の他動詞) の時、
$\langle f(x_1), \ldots, f(x_n)\rangle \in \mathcal{F}(\alpha)$ ならば $\mathcal{M} \models_{f,K} \phi$ である。

(d) ϕ が $x = y$ の形式の条件 (x, y は指示標識) の時、$f(x) = f(y)$ ならば $\mathcal{M} \models_{f,K}$ ϕ である。

(e) ϕ が $\neg K_1$ の形式の条件 (K_1 は談話表示構造) の時、埋め込み関数 f の談話表示構造 K_1 の埋め込みへのどの拡張 $g(g \supseteq_{K_1} f)$ も、談話表示構造 K_1 のモデル $\mathcal{M}$ への適切な埋め込みにならないならば、$\mathcal{M} \models_{f,K} \phi$ である。

(f) ϕ が $K_1 \Rightarrow K_2$ の形式の条件 (K_1, K_2 は談話表示構造) の時、$[g, K_1]^{\mathcal{M}}_f = 1$ である、埋め込み関数 f の談話表示構造 K_1 のモデル $\mathcal{M}$ への適切な埋め込み関数 $g(g \supseteq_{K_1} f)$ すべてに対し、$[h, K_2]^{\mathcal{M}}_g = 1$ となるような g の談話表示構造 K_2 のモデル $\mathcal{M}$ への適切な埋め込み関数 $h(h \supseteq_{K_2} g)$ が存在すれば、$\mathcal{M} \models_{f,K} \phi$ である。

(31) モデルの例

(a) モデル $\mathcal{M}_1 = \langle \mathcal{U}_{M_1}, F_{M_1}\rangle$
- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}_1} = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(Mary) = a$, $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(Fred) = f$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(man) = \{d, e, f\}$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(book) = \{b\}$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(likes) = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle a, e\rangle, \langle d, b\rangle, \langle e, f\rangle, \langle f, a\rangle\}$

(b) モデル $\mathcal{M}_2 = \langle \mathcal{U}_{\mathcal{M}_2}, \mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}\rangle$
- $\mathcal{U}_{\mathcal{M}_2} = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(Mary) = a$, $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(Fred) = f$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(man) = \{d, e, f\}$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(book) = \{b, c\}$
- $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(likes) = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, b\rangle, \langle d, b\rangle, \langle a, e\rangle, \langle e, f\rangle, \langle f, a\rangle, \langle f, b\rangle, \langle f, d\rangle, \langle f, e\rangle, \langle f, f\rangle\}$

付録 E

ラムダ記法と意味処理

本章は、自然言語の文章の意味表現としての談話表示理論 (DRT, Discourse Representation Theory) と、その計算機への実装を詳しく述べることを目的とした講義「自然言語理解システム」の補助資料として用意された。文から談話表示構造 (DRS) への翻訳の準備として、ラムダ記法を導入し、また文の統語構造と語彙の意味表記から「自動的に」文の意味表現が得られることを示す。

E.1 有限個の語から無限通りの表現を生成する「言語」システム

- 日本人の大人が持つ日本語の語彙 (vocabulary) は平均的に 5 万程度
- 我々が見聞きしたり、発話したりする文の数は無限
- 語から文を生成する仕組みにより「無限個の文が生成される」
- 一つは、接続詞などによって（簡単な）語句や文をつないで長い文を作り出すもの
- もう一つは、「再帰的な」構造
- 再帰的な構造の例：関係節—言語学の用語 (日本語文法では、連体修飾節)
  「（日本語の場合）文 S を名詞句 NP の前に置き、S によってその名詞句の指示対象や意味を特定する」用法
  関係節をもつ名詞句を主語や目的語として使える—文の中に文が現れる (このような文の中の文のことを「埋め込み文」[*1]という。

「文の意味表現を求める」というタスク（仕事）を考える。

基本方針 (合成性): それぞれの語に論理式を与え、また文法規則によってどのような語や句がより大きな単位となって文を構成する要素となるかを規定

注意：ここで考える文の要素は、名詞句や動詞句のように我々の言語直感に合致する要素

- それぞれの語を、文法的な特徴からカテゴリに分ける（固有名詞、自動詞、他動詞など）
- それぞれの語に、カテゴリに応じたタイプの論理式を割り当てる
- それぞれのカテゴリの語や句がどのように組み合わされて、文を構成する要素を作

[*1] このような埋め込み文は、文の引用や副詞節などでも現れる。

るかという文法規則を立てる

- その文法規則ごとに、それぞれの語句の意味表現から、どのような意味表現が作り出されるか、という規則をたてる

そのための妥当な方法：ラムダ記法を用いて意味を表現する

E.2 ラムダ記法とラムダ計算

- ラムダ記法は Alonzo Church が 1930 年代に考え出した数学的な道具
- 言語への応用は言語学者の Richard Montague の功績

E.2.1 無名関数を作り出すラムダ

- 数学の問題：「f は実数を定義域とし、$f(x) = x^2 + 3$ であるような関数とする。この時、10 に対する f の値はいくらか？」
- その計算方法：

  10 に対する f の値とは、$f(10)$ を計算すればよい。それには $f(x) = x^2 + 3$ だから、 $f(10) = 10^2 + 3$ となる。これを計算して、答えは 103
- ここで行われたこと： $x^2 + 3$ という式の x に 10 を代入して、$10^2 + 3$ という形にし、算数計算によって、103 を出力する。
- 注意: 関数の定義に用いられる引数を**仮引数**、計算のために与える引数を**実引数**と呼ぶ
- ラムダ式 $\lambda x \,.\, x^2 + 3$ は $x^2 + 3$ を計算する関数を表したもの

  ただしこれは、f のような名前を持たない。だから $f(10)$ を計算せよ、とは書けない。そのかわり、$(\lambda x \,.\, x^2 + 3)(10)$ のように書く
- ラムダ計算では $(\lambda x \,.\, x^2 + 3)(10)$ を $(10)(\lambda x \,.\, x^2 + 3)$ と書いても良い—なぜなら、どちらが (実) 引数でどちらが関数かは普通は明らか
- ここでは $(\lambda x \,.\, x^2 + 3)@(10)$、もしくは $(\lambda x \,.\, x^2 + 3)@10$ と表す—「関数@実引数」 の形に統一
- $(\lambda x \,.\, x^2 + 3)@(10)$ は 103 と等価ではないことに注意。この形から 103 を求めるには、まず $10^2 + 3$ に変形してから算術演算によって計算する
- β 変換：このように $(\lambda x \,.\, x^2 + 3)@10$ を $10^2 + 3$ に変形する操作のこと[*2]。
- 次に二つの引数を持つ関数 $g(x, y) = x^2 + y^2$ をラムダ式で表すことを考える

  これには $\lambda x \lambda y \,.\, x^2 + y^2$ と $\lambda y \lambda x \,.\, x^2 + y^2$ の 2 通りが可能
- ラムダ式では実引数を同時に与えることはできない—1 個の仮引数に対し実引数を 1 個、次の仮引数 1 個に対し実引数を 1 個、というように順番に渡さなければならない。
- まず仮引数 x に最初の実引数が与えられ、次に仮引数 y に次の実引数が与えられる、というように順番が決まれば、ラムダ式の形も決まる。この場合 $\lambda x \lambda y \,.\, x^2 + y^2$ が求めるラムダ式
- これを用いて、$g(3, 2)$ に対応する計算は:

[*2] 最後の算術演算そのものはラムダ計算の範囲外である。

1. 仮引数 x に実引数 3 が渡される: $(\lambda x \lambda y\ .\ x^2 + y^2)@3$
2. $(\lambda x \lambda y\ .\ x^2 + y^2)@3$ に β 変換を施すと、$\lambda y\ .\ 3^2 + y^2$
3. 仮引数 y に実引数 2 が渡される: $(\lambda y\ .\ 3^2 + y^2)@2$。
4. β 変換を施すと、$(3^2 + 2^2)$

E.2.2 ラムダ抽象化

- ラムダ抽象化とは、数式から関数を作り出すような操作のこと
- プログラム作成への例え
  アニメーション作成において、「馬オブジェクトを前方 1m、上 0.5m の位置に同時に移動させ、次に前方 1m 下 0.5m の位置に同時に移動させる」を行うプログラムを書いたとする。
  - ここで、「1m」をラムダ抽象化する
    $\lambda x.$(馬オブジェクトを前方 x、上 $0.5m$ の位置に同時に移動させ、次に前方 x 下 $0.5m$ の位置に同時に移動させる)
  - これは「馬オブジェクトを前方 xm、上 0.5m の位置に同時に移動させ、次に前方 xm 下 0.5m の位置に同時に移動させる」という「関数」(Ruby で言えばメソッド) を表す
  - さらに続けて「0.5m」、「馬オブジェクト」をラムダ抽象化
    $\lambda o \lambda y \lambda x.$($o$ を前方 x、上 y の位置に同時に移動させ、次に前方 x 下 y の位置に同時に移動させる)
  - 以上のラムダ抽象化から、「任意のオブジェクトをジャンプしながら前方に移動」する関数が得られた

この手法を「文の意味表現」から「個々の語の意味表現を求める」ために用いる

A woman walks

- 一階述語論理で表すと $\exists x(woman(x) \wedge walk(x))$
- この文は $a\ woman$ という名詞句と $walks$ という動詞句から構成されている
- この文の一階述語論理式に対し、$walks$ に対応する $walk$ をラムダ抽象化
  $\lambda P.\exists x(woman(x) \wedge P@x)$
  注: $walk(x)$ を $P@x$ と書き改めたのは、$walk$ は一項述語 (ラムダ記法では関数) で x がその実引数だから— つまり、$walk(x)$ は $walk$「関数」に対する実引数 x の関数適用の結果得られた
- ここまでで $a\ woman$ の意味表現が得られた:$\lambda P.\exists x(woman(x) \wedge P@x)$
- 今度はこれに対して $woman$ をラムダ抽象化する。$woman$ も $walk$ と同様、一項述語なので、同様にして $\lambda Q \lambda P.\exists x(Q@x \wedge P@x)$ が得られる
- これが限定詞 (伝統的な言葉で言えば冠詞)a の意味表現として規定したもの

Every boy laughs

- 一階述語論理で表すと $\forall x(boy(x) \rightarrow laugh(x))$

- この文は *every boy* という名詞句と *laughs* という動詞句から構成されている
- この文の一階述語論理式に対し、*laughs* に対応する意味表現 $laugh$ をラムダ抽象化
  $\lambda P.\forall x(boy(x) \rightarrow P@x)$
  注: $laugh(x)$ が $P@x$ と書き改めた理由は先と同じ
- ここまでで *every boy* の意味表現が得られた:$\lambda P.\forall x(boy(x) \rightarrow P@x)$
- 今度はこれに対して *boy* をラムダ抽象化する。*boy* も $laugh$ と同様、一項述語なので、同様にして、$\lambda Q\lambda P.\forall x(Q@x \rightarrow P@x)$ が得られる。
- これが限定詞 *every* の意味表現として規定したもの

John loves a woman

今度は語彙の意味から文の意味を構成してみる

- E.2.2 節で求めた限定詞 *a* の意味表現: $\lambda Q\lambda P.\exists x(Q@x \wedge P@x)$
- 名詞 *woman* の意味表現を $\lambda z.woman(z)$ とすると、*a woman* の意味表現は、これらを関数適用した結果:
  $(\lambda Q\lambda P.\exists x(Q@x \wedge P@x))@(\lambda z.woman(z))$
- これを β 変換すると: $\lambda P.\exists x(\underline{\lambda z.woman(z)@x} \wedge P@x)$
  下線部を β 変換して: $\lambda P.\exists x(woman(x) \wedge P@x)$
- *loves* の意味表現を $\lambda u\lambda v(u@\underline{\lambda z.love(v,z)})$ とすると、*loves a woman* の意味表現は:
  $(\lambda u\lambda v(u@\underline{\lambda z.love(v,z)}))@\ \underbrace{\lambda P.\exists x(woman(x) \wedge P@x)}$
- これを β 変換すると:
  $\lambda v(\underbrace{\lambda P.\exists x(woman(x) \wedge P@x)}\ @\underline{\lambda z.love(v,z)})$
- さらに β 変換: $\lambda v(\exists x(woman(x) \wedge (\underline{\lambda z.love(v,z)})@x))$
- もう一度 β 変換: $\lambda v.\exists x(woman(x) \wedge love(v,x))$
- 最後に *John* の意味表現 $\lambda P.P@john$ に *loves a woman* の意味表現を関数適用:
  $(\lambda P.P@john)@(\lambda v.\exists x(woman(x) \wedge love(v,x)))$
  $(\lambda v.\exists x(woman(x) \wedge love(v,x)))@john$
  $\exists x(woman(x) \wedge love(john,x))$

Every boy loves a woman

語彙の意味から文の意味を構成してみる。途中を省略して以下を仮定

- *every boy* の意味表現: $\lambda P.\forall x(boy(x) \rightarrow P@x)$
- *loves a woman* の意味表現: $\lambda v.\exists x(woman(x) \wedge love(v,x))$

この 2 つの式には変数 x が共に現れているが、これらは無関係で紛らわしいので、(α 変換により) 変数を付け変え、*loves a woman* の意味表現を以下のようにする:
$\lambda v.\exists u(woman(u) \wedge love(v,u))$

- *every boy* の意味表現に対し *loves a woman* の意味表現を実引数として関数適用:
$(\lambda P.\forall x(boy(x) \to P@x))@\underline{\lambda v.\exists u(woman(u) \wedge love(v,u))}$
- これを β 変換 $\forall x(boy(x) \to \underline{(\lambda v.\exists u(woman(u) \wedge love(v,u)))}@x)$
- もう一度 β 変換により、最終形:
$\forall x(boy(x) \to \exists u(woman(u) \wedge love(x,u)))$

A pretty woman walks

新たな文法規則と、それに対応する意味規則を考える

- *A pretty woman walks.* に対して考えられる一階述語論理式:
$\exists x(pretty(x) \wedge woman(x) \wedge walk(x))$
- 先と同様に *walks* に対する意味表現をラムダ抽象化して *a pretty woman* の意味表現を得る: $\lambda P.\exists x(pretty(x) \wedge woman(x) \wedge P@x)$
- *A pretty woman* が *a* と *pretty woman* から構成されることと、*a* の意味表現が $\lambda Q \lambda P.\exists x(Q@x \wedge P@x)$ であることから、*pretty woman* の意味表現を求める:
$\lambda z.(pretty(z) \wedge woman(z))$
- *woman* に対する意味表現をラムダ抽象化する: $\lambda R \lambda z.(pretty(z) \wedge R@z)$
これが形容詞 *pretty* の意味表現
- *pretty* は形容詞 (Adjective)、*woman* は名詞 (Noun) であることから、考えられる文法規則: `n(app(A,N)) --{\rangle} a(A), n(N).`
参考: 主語や目的語の役割をする英語の名詞句の基本形は、限定詞と名詞の組み合わせ。この例のように「形容詞と名詞の組み合わせ」では名詞句を構成しているとは考えられないが、名詞よりも大きなカテゴリ。そこで NBar (直訳すれば、名詞プラス) というカテゴリ名を与える者もいる。

E.3　意味解析プログラム

タスク 1　自然言語 (ここでは英語) に対する統語論の記述。ここでは **DCG を用いて実現**。

DCG の助けを得て、文の構造を求めることができる

例:

```
                                s
                                |
               +--------------------------------+
               np                               vp
               |                                |
      +------------+               +---------------------+
     det          noun            tv                     np
      |            |               |                     |
      |            |               |          +-------------+
      |            |               |         det           noun
      |            |               |          |             |
      |            |               |          |             |
    every        woman           love         a            boy
```

注: DCG の規則は、このような木の部分部分の成り立ちを決めるもの。

例えば s --> np, vp. は、木の根 (s) とその子 (np と vp) の関係を規定

タスク 2　ラムダ計算の助けを得て、語彙項目の意味表現を記述。**語彙項目の意味表現の求め方や、基本的なカテゴリの語彙の意味表現を学んだ**。

注: 2 節でみたように、個々の語の意味表現や、句の意味表現の求め方を学んだ

タスク 3　文を構成する要素 (句) の意味を $\mathcal{R}$、その句を構成する要素の意味記述を $\mathcal{F}$ と $\mathcal{A}$ とすると、関数適用の助けを得て、基本的に $\mathcal{R}$ が $\mathcal{F}$@$\mathcal{A}$ によって求められることを学んだ。ただし、どの部分が関数子 (ここでは $\mathcal{F}$) であり、どの部分が引数 (ここでは $\mathcal{A}$) であるかは人間が考えなければならない。

例: *Every woman loves a boy* に対する DCG の出力:

```
app(app(lam(A,lam(B,all(C,imp(app(A,C),app(B,C))))),lam(D,woman(D))),
         app(lam(E,lam(F,app(E,lam(G,love(F,G))))),
              app(lam(H,lam(I,some(J,and(app(H,J),app(I,J))))),
                  lam(K,boy(K)))))
```

β 変換 (内部で適切に α 変換を行う) プログラムも用意されている— betaConversion.pl がそれ。これを用いると次のような結果が得られる。

```
|?- s(A,B,[every,woman,loves,a,boy],[]), betaConvert(A,C).
A = s(np(det(every),noun(woman)),vp(tv(love),np(det(a),noun(boy)))),
B =app(app(lam(A,lam(B,all(C,imp(app(A,C),app(B,C))))),lam(D,woman(D))),
         app(lam(E,lam(F,app(E,lam(G,love(F,G))))),
              app(lam(H,lam(I,some(J,and(app(H,J),app(I,J))))),
                  lam(K,boy(K)))))
C = all(X,imp(woman(X),some(Y,and(boy(Y),love(X,Y))))) ?
yes
```

E.4 問題

Vincent and Mia laugh. から、妥当な意味表現を得られるようにしよう。

- 等位構造を作る **and** は次のような意味 (式) を持つ:
  λX.λY.λP.(X@P$\wedge$Y@P)
- **and** に対する語彙項目は:
  coord(lam(X,lam(Y,lam(P,and(app(X,P), app(Y,P)))))) --> [and].
- 名詞句の等位構造を作る文法規則を np --> np, coord, np. とする。
- これらから *Vincent and Mia* の意味 (式) として以下が得られることを示せ (合わせて、上の文法規則を改変して、意味表現を求める DCG 規則に直せ)
  λP.((λQ.Q@VINCENT)@P$\wedge$ (λR.R@MIA)@P)
- さらにこれを λx.LAUGH(x) に適用して (β 変換により) 以下が得られることを示せ:
  λx.LAUGH(x)@VINCENT $\wedge\lambda$x.LAUGH(x)@MIA
- 最終的に (β 変換により) 次の式に変換できることを示せ:
  LAUGH(VINCENT)$\wedge$LAUGH(MIA)

E.5 固有名の意味記述についての補足

- E.2.2 節で、*John* の意味表現を $\lambda P.P@john$ と紹介。ここでなぜ *John* の意味表現は、個体定項の `john` としなかったのか？
- 理由は、*John* のような固有名は、*a woman* や *every boy* のような名詞句と同じように振る舞う—主語や目的語になることができる。だから固有名と *a woman* のような名詞句の型を区別する理由がない—他の名詞句の意味の「型」と同じにしたい！
- E.2.2 節でみたように、*a woman* の意味表現は $\lambda P.\exists x(woman(x) \wedge P@x)$ — これは「関数」タイプ
  だから、*John* の意味表現も、`john` という「個体」ではなく、$\lambda P.P@john$ という「関数」として表したのである

E.6 文法規則に用いる記号一覧

記号	説明	例
s	文 (Sentence)	“A woman laughs.” “Every boy loves a girl.”
n	名詞 (Noun)	“woman” “boy” “dog”
v	動詞 (Verb)	“walk” “laugh” “love”
iv	自動詞 (Intransitive Verb)	“walk” “laugh” “smile”
tv	他動詞 (Transitive Verb)	“love” “eat” “have”
a	形容詞 (Adjective)	“pretty” “red” “big”
det	限定詞 (DETerminer)	“a” “every” “ some”
pn	固有名 (Proper Noun)	“John” “Mia” “Vincent”
coord	等位接続詞	“and” “or” (COORDinate conjunction)
np	名詞句 (Noun Phrase)	固有名、“a woman” “every boy”
vp	動詞句 (Verb Phrase)	自動詞、“loves a woman” ”eat a humberger”
adv	副詞 (ADVerb)	“fast” “quickly” “slowly”

E.7　ラムダ計算に関係する記号一覧

記号	説明	一階述語論理式	Prolog 表記
`forall`	全称記号	$\forall x(man(x))$	`forall(X,man(X))`
`some`	存在記号	$\exists y(girl(y))$	`some(Y,girl(Y))`
`and`	連言記号	$girl(mia) \wedge boy(john)$	`and(girl(mia), boy(john))`
`or`	選言記号	$girl(mia) \vee lady(mia)$	`or(girl(mia), lady(mia))`
`imp`	含意記号	$girl(mia) \rightarrow love(john, mia)$	`imp(girl(mia),` `love(john,mia))`
`not`	否定記号	$\neg love(mia, john)$	`not(love(mia,john))`
`lam`	ラムダ	$\lambda x.boy(x)$	`lam(X, boy(X))`
`app`	関数適用	$\lambda x.boy(x)@john$	`app(lam(X, boy(X)),john)`

付録 F

意味の型

今まで、普通名詞 (例: woman) や自動詞 (例: walk) の意味表現を $\lambda x.woman(x)$ や $\lambda x.walk(x)$ と書いてきた。また、限定詞 a や every、それに固有名 (例: John) の意味表現を $\lambda Q\lambda P.\exists x(Q@x \wedge P@x)$、$\lambda Q\lambda P.\forall x(Q@x \rightarrow P@x)$、$\lambda P.P@john$ のように書いてきた。

これらの意味表現において、微妙に λ 変数において、大文字や小文字が違い分けられていたことに気がついていただろうか？

$\cdots$

目ざとい人は気がついていただろう。ここではその理由について話す。

既に学んだように、一階述語論理では文の意味表現は「命題」を表す。つまり、それが語られている状況や世界に照らし合わせれば、真か偽か (成り立っている事柄かそうでないか) が判定できるものである。これを `t` タイプ (型) と呼ぶことにする。`t` とは真理を表す Truth から取られたものである。

それに対し、世界を構成する基本は個体である。個体のことを英語で entity という。そこで個体を `e` タイプと呼ぶことにする。

普通名詞 (例: woman) や自動詞 (例: walk) は、個体が与えられれば、それによって命題を作ることができる。つまり、「個体 `e` を引数とし、真理値 `t` を返す関数」と考えることができる。これを $\langle e,t\rangle$ と書く。左側が引数のタイプ、右側が関数本体のタイプとなる。これをラムダ式で表すと、$\lambda x.\phi@x$ (ϕ は関数本体を表す、例えば `walk` の場合は、$\lambda x.walk@x$、つまり $\lambda x.walk(x)$) となる — そう、小文字のラムダ変数は、その変数の値が個体のタイプであるマーカーのつもりで使われていた。そして、普通名詞も自動詞も、すべてこれが基本形であった。

John や Mia のような固有名は付録 E で述べたように、$\lambda P.P@john$ のように書かれる。これはどうしてかといえば、固有名は**個体を表す**のでなく、**動詞句や自動詞のようなタイプの表現と組み合わされて文を作る**ものと考えているからである。つまり、動詞句 (例えば自動詞) の意味のタイプが $\langle e,t\rangle$ なので、これを引数としてタイプ t を返す関数、つまり $\langle\langle e,t\rangle,t\rangle$ が固有名の意味のタイプ (であって、**名詞句のタイプ**) と考える。ここで、$\langle e,t\rangle$ は関数のタイプであり、これが引数になっているため、個体のタイプの引数と区別するために大文字を使うと、$\lambda P.P@john$ となるのであった。

形容詞は、普通名詞の前に置かれて名詞を修飾することがある。これを形容詞の限定用法と呼ぶ。例えば pretty や red は、普通名詞と組み合わされて、普通名詞相当の句を作り出す。例えば、 pretty woman がそうである。ここで普通名詞の意味タイプは $\langle e, t\rangle$ であるので、限定用法の形容詞の意味タイプは $\langle\langle e, t\rangle, \langle e, t\rangle\rangle$ となる。だからラムダ式で書けば、pretty は $\lambda R\lambda z.(pretty(z) \wedge R@z)$ となる。(R という大文字が使われたのは、引数が $\langle e, t\rangle$ というタイプだから)

他動詞 (例: love) は、直感的には二つの個体をとって命題を作る。しかし英語の場合（注意深く考えると、日本語でもその基本は同じなのだが)、他動詞はまず目的語の (個体ではなく)「名詞句」がくっついて動詞句を作り、それに主語がくっついて文を作る。つまり先ほどの書き方を使うと、$\langle\langle e, t\rangle, t\rangle$ というタイプの名詞句を引数として、$\langle e, t\rangle$ というタイプの動詞句を返す関数が他動詞となる。したがって、他動詞のタイプは、$\langle\langle\langle e, t\rangle, t\rangle, \langle e, t\rangle\rangle$ となる。これをラムダ式で表すと、$\lambda R.\lambda z.\psi$ のような形になる (ψ は関数本体を表す)。ということで (ややこしいので細部を省略する)、例えば `love` の場合は $\lambda R.\lambda z.\underline{R@\lambda x.love(z, x)}$ となる (下線部が ψ の部分)。

限定詞のタイプについて述べる。“a” はどのような語かといえば、まず普通名詞 (タイプは $\langle e, t\rangle$) と組み合わされて名詞句を作り、それが動詞句 (タイプは $\langle e, t\rangle$) と組み合わされて文 (タイプは t) を作る。つまり、“a” は普通名詞 (タイプは $\langle e, t\rangle$) を引数として、(動詞句を引数として文を作る) 名詞句のタイプ $\langle\langle e, t\rangle, t\rangle$ を本体とするような関数と考えられる。限定詞 “a” が引数とする普通名詞を P、その普通名詞が引数とする動詞句を Q で表すと、そのラムダ式は $\lambda P\lambda Q.\phi$ のような形になる。我々は既に “a” の意味表現は $\lambda Q\lambda P.\exists x(Q@x \wedge P@x)$ であることを知っている。これと比べてみれば、より理解が深まるだろう。

問題

1. 以下の例文にみられる “and” の用法から等位接続詞の “and” の意味のタイプを考えよう。
   - Vincent and Mia dance.
   - John sings, and Mary dances.
   - Mary walks and smiles.
   - Mary loves John and Tom.
   - Mary is a pretty and clever girl.
2. 前置詞 “in” の意味のタイプを以下の例から考えよう。
   - Mary sings in a room.
   - John shows a stone in his hand.
3. 形容詞の働きとして、限定用法 (例: a pretty woman) 以外に、be 動詞と組み合わされて動詞句を作る (例: is pretty) という用法がある。これを叙述用法という。もしも叙述用法における形容詞の意味タイプが、限定用法の形容詞の意味タイプと同じだとすれば、それと組み合わされて動詞句を作る be 動詞の意味タイプはどのようになるか？
4. 次のような be 動詞の意味タイプはどのようなものと考えられるだろうか？
   - John is Vincent. (実はこの二人は同一人物だった、という意味で)

- John is a boy.