2014年度「論理と意味論／数理論理学I」導入

白井英俊 (中京大学工学部電気電子工学科)

2014年4月11日

講義に関する注意

本講義は、講義中に演習を行うことが多い。講義で述べる内容が前までの講義内容に基づいていることが多いため、それまでの内容が理解できているかどうかを確認したい。そのため演習を行うのである。また、演習を行うことで学生もどこまで理解できているかのチェックが可能である。もしも理解が不十分であると感じたなら、講義中でも講義後でも質問という形でレスポンスを返してほしい。

病気などでやむを得ず欠席した場合には、診断書などを添えて届けること。部活動などで欠席する場合には、部の顧問の教員 (教員に限る) の証明書を添えて提出すること。ただし、欠席したからといってレポートが免除されることにはならない。

成績評価は、出席 (講義中の貢献度やレポートも考慮) および期末試験に基づいて行う。ただし、出席が7割に満たないものは、大学の規定により試験を受ける資格がない。

この講義では教科書を使用する。残念ながら貸与できる教科書はないが、以下のウェブページに教科書や講義で配布した資料を置くので、印刷して講義の時に持参して欲しい。

`http://www.cyber.sist.chukyo-u.ac.jp/sirai/classes/logic/`

クイズと論理1

ある男の魂が天に昇る途中で、聖人にこんなことを教えられた。

「もうすぐ別れ道につく。一つの道は天国へ、もう一つの道は地獄へ通じている。その別れ道には二人の人が立っていて、一人は天使、もう一人は悪魔である。どちらがどちらかは外見上、区別がつかない。しかし、悪魔は必ずウソをいい、天使はかならず本当のことをいう。ただし二人は「はい」か「いいえ」のどちらかでしか答えられない。

あなたは一回だけ質問できる。よく考えて質問すれば、天国への道か開けるであろう」

天国の道を知るにはどのような質問をしたらよいだろうか？

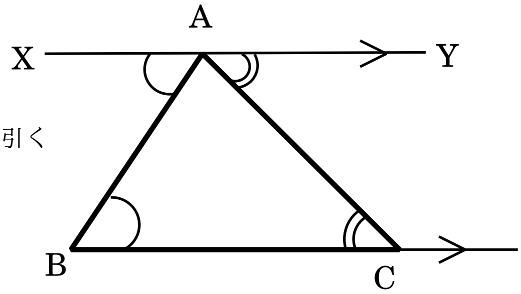
クイズと論理2

8つの見分けがつかない球がある。そのうち7つは同じ重さであるが、1つだけ重さが違うものがある。天秤を「なるべく少ない回数だけ」用いてそれを見分けたい。どのようにすればよいか？

証明

- 証明とは: ある事柄 (=命題) が正しいことを示すための文の並び。「正しい (成立する)」と仮定される前提や「常に成り立つ」と受け入れられている公理、そして証明すべき命題に加えて、前提や公理などから「正しい」とされる推論規則によって導出される一連の命題とから構成される。

証明の例:



例 1. 三角形の内角の和が **180** 度であることの証明**:**

1. 右図に示すような任意の三角形 ABC を考える。
2. 点 A を通り底辺 BC に平行になるような直線 XY を引く
3. $\angle XAB = \angle ABC$
4. $\angle CAY = \angle ACB$
5. $\angle XAB + \angle BAC + \angle CAY = 180^o$
6. $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180^o$
7. 以上から三角形の内角の和は 180^o であることが示せた

   説明: 1 と 2 は仮定だが「任意の」という言葉によって「一般性をもたせている」ところが重要。3 と 4 は「錯角の定理」の適用。5 は一直線の角度が 180^o という公理。6 は、3,4,5 からの帰結。7 は、6 と、1 と 2 にもたせた「一般性」による帰結。

例 2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **の証明**

注意: これは「任意の正整数 n」に対して成り立つ、ということが重要

1. $n = 1$ の時を考える:

   左辺: $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k = 1$

   右辺: $\displaystyle\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times (1+1)}{2} = 1$

   以上により、与式は成立している。
2. $n = m$ $(m \geq 1)$ の時に与式は成立すると仮定する。つまり、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$
3. $n = (m+1)$ の時にも成立することを示す:

   左辺: $$\sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^{m} k + (m+1)$$
   $$= \frac{m(m+1)}{2} + (m+1)$$
   $$= \frac{m(m+1)}{2} + \frac{2(m+1)}{2}$$
   $$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} = \text{右辺}$$

   以上により、$n = (m+1)$ の時も与式は成立する。
4. 以上から**数学的帰納法**により、与式は成立する。

   説明: ここで示したのは、$n = 1$ の時に与式が成立することと、「$n = m$ の時に与式が成立するという仮定のもとで $n = m + 1$ の時にも成立すること」。しかし $n = 1$ の時に成立することから、$n = 2$ の時も成立することが言える。よって $n = 3, 4, \ldots$ にも成立することが言える。この論理が**数学的帰納法**という言葉で表されている。(これなしでは証明は不十分)

例 3. 「$\sqrt{2}$ が有理数でないこと」の証明

注意: 「正数 n が有理数」であるための必要十分条件は、2 つの自然数 a, b を用いて $n = \frac{a}{b}$ と表せること。例えば $\frac{1}{3}$ や $\frac{41}{99}$ は有理数である。また、どの整数 m も $\frac{m}{1}$ と表せるので有理数。

1. $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する
2. 1 から、$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ なる「互いに素」である正整数 a, b が存在する (注意: 「正整数 a, b が互いに素」であるための必要十分条件は、a と b に 1 以外の約数を持たないこと、言い換えれば c, d を適当な正の整数とすると、$a = m * c$ かつ $b = m * d$ となるような 1 以外の正整数 m が存在しないこと)
3. $2 = \frac{a^2}{b^2}$ (2 の両辺を二乗)
4. $a^2 = 2 \times b^2$ (2 の両辺を二乗)
5. 4 から a は偶数 (つまり 2 の倍数) なので、$a = 2c$ と表せる
6. 4 に代入する: $4c^2 = 2 \times b^2$
7. 4 に代入する: $b^2 = 2c^2$
8. 7 から b も偶数 (つまり 2 の倍数) なので、$b = 2d$ と表せるはず
9. 5 と 8 は 2 の「正整数 a, b は互いに素」に矛盾する
10. 以上により、1 の仮定が誤り、すなわち、「$\sqrt{2}$ が有理数ではない」ことが示された。

    説明: これは、「背理法」を使った証明の例である。

    背理法とは、「証明すべきもの」の「否定」を仮定することから始める。ここでは「$\sqrt{2}$ が有理数でない」ことを証明するために、その否定である「$\sqrt{2}$ が有理数である」ことを仮定するのである。それ以降は公理およびこの仮定から導出される命題にどのようなものがあるかを展開していく。そして「矛盾」、すなわち公理や仮定などから導出された命題を否定する命題を導き出す。

    この証明方法での大前提は、考えている世界には矛盾はない、ということである。矛盾が起こるとすれば「仮定」が間違っているからである、という論理である。ここでは唯一の仮定とは「証明すべきものの否定」であった。矛盾が起きたことからこの仮定の否定が成り立つ、ゆえに「証明すべき事柄」が成り立つという論理である。

問題 1: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ が任意の自然数 n に対して成り立つことを証明せよ。

問題 2: 「素数が無限個あること」を背理法を用いて証明せよ。

論証と議論

以下の文章を読み、(1) 文章の結論と考えられる命題、(2) 結論の命題がどのような命題を根拠として述べられているか、を述べよ。また、(3) その文章において、根拠の命題を正しいとしたならば、結論を必ず認めなければならないものかどうか判定せよ。

問題 3: 「トマトの缶詰を長く保存しておくとビタミンが減るのではないかと思われるかも知れない。しかし、トマトは酸味をもっている。そして、酸味があるとビタミン類は安定に保たれる。したがって、トマトの缶詰を長く保存していても、ビタミン類の減少はあまりない。」

問題 4: 「鶏のえさに青草を加えると、青草に含まれるカロチンという色素が卵黄の色に影響を与え、卵黄の色を濃くする。このカロチンというのは自然の色素で、同時に体の中でビタミン A に変わる物質である。したがって、卵黄の色の濃い卵の方が栄養価 (ビタミン A) が高い。」

論理 (と算数) のクイズ

問題 5: 次の文章を読み、質問に答えよ。

３人の子どもが遊んでいる。どの子どもも自分の顔を見ることができないので、自分の顔が汚れているかどうか知り得ない。その３人に向かって、父親が言った「君達の少なくとも一人は顔が汚れているぞ」. そこで子どもたちは互いを見合って言った。

1 人目の子ども: 「自分の顔が汚れているかどうか分からないな」

2 人目の子どもはそれを聞いて 「自分の顔が汚れているかどうか分からないな」と言った。

3 人目の子どもは二人の発言を聞いて: 「顔が汚れているかどうか分かったけど、言わない」

さて、3 人目の子どもの顔は汚れているだろうか？またどうやってこの子はそれが分かったのだろうか？

問題 6: (難問) a と b は 2 から 100 までの自然数であり $a \geq b$ とする。Mr. P はその積 $(a * b)$ が何かだけを知っている。Mr. S はその和 $(a + b)$ が何かだけを知っている。以下の Mr. P と Mr. S の会話から、a と b が何かを推論せよ。

- Mr. P: 私には a と b が何か、さっぱり分からない。
- Mr. S: 私も分からないが、P さんにも分からないことは分かっていたよ。
- Mr. P: 君の発言を聞いて、私には a と b が何か分かったよ。
- Mr. S: 私も分かった。

1　論理学とは

重要語: 文、命題、構文論、意味論、曖昧さ、形式言語

論理学とは、我々が日常的に行なっている推論や議論の正しさ、さらにいえば何が「真」かを明らかにするための学問体系である。

論理学の歴史はギリシャのアリストテレスまで遡ることができる。アリストテレスは、文のいろいろなパタンを分類し、どのようなパタンの文が続いた場合にどのようなパタンの文が真となるかを議論している[*1]。このように歴史が長い学問であるが、基礎となる考えは近年になって変わってきている。

本稿で取り上げる論理学は、基礎を数学に置く数理的な論理学である。まず、議論や推論を成り立たせている「言葉」について集合論を背景として形式化を行い、それぞれの言葉に対し、真理値の観点から意味を与えて行く。そして真理値を保存する記号的な操作によって、推論や議論の正しさを保証する。

一般に言語には、どのような単語の並びが「文」を構成するか、という**構文論** (syntax) と、それぞれの単語が何を指すか、また文が表しているもの (命題) が真か偽か、ということを決定する**意味論** (semantics) とから構成される[*2]。論理学では、曖昧なところがないように、この構文論と意味論を厳密に定義した形式言語を用い、それによっていろいろな命題を表している。

ここで、我々が日常的に使っている言語 (これを「自然言語」という) がそのままの形では、論理学で使えない理由を簡単に述べておこう。上で述べたことからわかるように、それは、**自然言語のもつ曖昧さを排除するためである。**例えば「太郎は自転車で逃げる泥棒を追いかけた」という文を考えてみよう。これは、自転車に乗っているのが太郎か、それとも泥棒なのか、曖昧である。つまり、この文がどういう事態を表しているか、それだけでは判断できない。言い換えれば、この文が事実を述べたものなのか、事実に反することを述べたものなのか、つまりこの文の真理値を判定できないのである。

今の例は、意味の曖昧さが、文の構造、つまり構文構造の曖昧さ (二通り以上に解析できること) に起因するものであった。実際には、日常言語のもつ曖昧さは、構文構造の曖昧さだけではなく、単語の意味の曖昧さにもよる場合がある。例えば、一休トンチ話に出て来る「このハシ渡るな」の逸話は、まさに「ハシ」の意味の曖昧さを利用したものであることは有名である。

しかし、論理学ではこういう曖昧さはあっては困るのである。論理学で扱う「文」は構文的な構造が唯一に決定できるものでなくてはならないし、また用いられる単語も意味に曖昧さがあってはならない。そうでなければ、議論の正しさを厳密に判定することができなくなるからである。

したがって、論理学では、曖昧さのない構文論をもち、そしてそれぞれの文に対して真理値を厳密に決定できる意味論をもつよう、形式言語を定義する必要があるのである。

本講義では、一階述語論理[*3] の理解を主たる目的とする。最初に、文を基本単位とする命題論理を紹介する。その理解を前提として、本講義の目的である一階述語論理の構文論と意味論を紹介し、最後に、計算機で推論を行なうための基本的理論である導出原理について述べる。

[*1] 例えば、「どの犬も動物である」、「どの動物も背骨がある」から「どの犬も背骨がある」という文が導ける、というように、正しい推論パタンにはどのようなものがあるか、が議論されている。

[*2] 言語学では、構文論、意味論に加えて、言葉と社会的な環境や文脈との関係を扱う運用論なども考える。

[*3] 文を基本単位と考える命題論理と、文を述語とその引数としての名詞句などに分解して考える一階述語論理が数理論理学の基本である。これら以外に、発展として、Lisp 言語のもとである λ 計算や、人工知能の知識表現研究や自然言語の意味論で用いられる様相論理などがある。

冗談の中の論理 1

「この病人を治しても殺しても、十分なお礼を差上げますから、全力をあげて治療してください...」。こう言われてお医者さんが精一杯努力したが、あえなく病人は死んでしまった。それから 1 ヶ月たっても患者の家族から医者に約束のお礼が届けられない。そこで医者が患者の家族に謝礼を催促すると、

家族: あなたは病人を治しましたか？
医者: いえ、残念ながら...
家族: それでは、病人を殺したのですか？
医者: いえ、とんでもない。
家族: 私は『治しても殺しても』と言ったはずですが。

冗談の中の論理 2

教授は学生に講義の単位を出す必要はない。講義の内容が学生にとって価値があるものならそれだけで学生は満足するだろうし、くだらない講義なら学生はその講義を取るはずがない。

冗談の中の論理 3

「ねえ、ママ。パパの頭はどうして禿げているの？」
「いろんな難しいことを考えているからですよ。」
「ああ、そうなんだ。だから、ママの髪はいつもふさふさなんだね。」

2 命題論理

重要語: 命題、真、偽、真理値

命題論理とは、その内容が真か偽かを考えることができる**命題** (proposition) を基本単位とする論理学である。簡単にいえば、命題論理とは個々の命題の真理値から、それらの組合せによって作られる複合的な命題の真理値を考えたり、命題同士の関係を論じたりする学問である。

このように命題論理は命題が単位であるので、命題の内部構造も問題とする述語論理と比べれば、簡単で分かりやすい論理学であり、またブール代数や論理回路理論などとも関係が深い。

ここで、文と命題の関係について述べておこう。我々が日常的に使っている言葉では、文とは「句点で終る言葉の並び」である[*4]。一方、論理学では、推論や議論の正しさに関心があるので、「真か偽か」を常に問題にする。そのため、論理学で扱われる文は、日常の言葉でいえば「平叙文」である。しかも、常に「その文が意味する事態や事象」の真理値が問題にできるものでなければならない。すなわち、その文が表す命題が「真か偽か」が問えるようなものでなければならない。端的にいえば、文と命題と真理値の関係は、図 1 のように表される:

> 文は言葉の並び、命題はその文によって表される事態や事象で真か偽かが問えるもの、真理値はその命題が真か偽かという「値」である。

3 命題論理の構文論

重要語: 基本命題、複合命題、命題変項、論理式、整式、基本論理式、

[*4] 日常的には文と文章は同じ意味として用いられるが、言語学では文とは基本的に一つの事態を表す言語形式であり、複数の文が意味的に結びついた集まりである文章とは区別される。

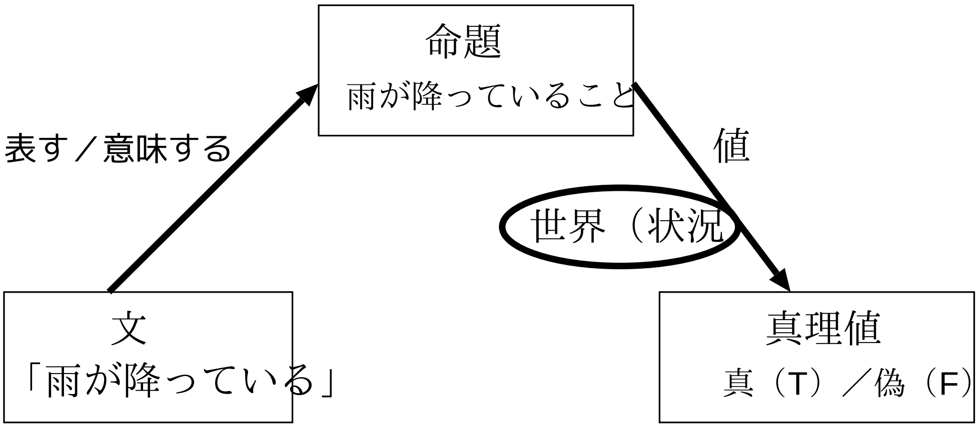


図１　命題論理における文、命題、真理値の関係

否定 ($\sim$)、連言 ($\wedge$)、選言 ($\vee$)、含意 ($\rightarrow$)、同値 ($\leftrightarrow$)

「雨が降っていて、道路が濡れている。」という文を考えよう。日本語を解するものなら誰でも、この文は「雨が降っている」という事象と「道路が濡れている」という事象を記述していると認めるであろう[*5]。したがって、今雨が降っていて、そして道路が濡れていれば、この文が表していることは真実である、すなわち今の状況において「真なる命題」をこの文は表していると考えられる。また、同時にこの文は「雨が降っている」という文と「道路が濡れている」という文から構成されており、これらの文もまた「真なる命題」を表していると考えられる。すなわち、「雨が降っている」と「道路が濡れている」はそれぞれ、真か偽かが問える命題を表しており、それらから構成されている「雨が降っていて、道路が濡れている」という文も真か偽かが問える命題を表していると考えられる。この例で示されるように、命題には、より小さな命題から構成される複合的な命題もある。このような命題を**複合命題**と呼んでおこう。

では、複合命題をより小さな命題に分解できたように、「雨が降っている」や「道路が濡れている」 もさらに小さな命題に分解できるであろうか？つまり、これらの文をさらに、命題を表す、より小さな文に分解することができるであろうか？

もしも「雨が降っている」を分解しようとすると、「雨が」や「降っている」に分解しなければならなくなる。しかし、これらはもはや真か偽かを問えるものではない。「雨が」に対しては「どうした」を考えなければ命題にならないし、同様に「降っている」も「何が」を考えなければ命題にならない。したがって、「雨が降っている」という文は、これ以上分解できない最小の命題であることが分かる。

このような最小の命題を**基本命題** (もしくは**素命題**) と呼ぶ。今みたように「雨が降っている」と「道路が濡れている」は両方とも基本命題の例である。そして、「雨が」も「雨が降っていて、道路が濡れている」も基本命題ではない。「雨が」の方は、そもそも真か偽かが問えないのであるから命題ですらない。一方、「雨が降っていて、道路が濡れている」は複合命題である。

基本命題を表すには、慣習的に $p, q, r, \ldots$ というアルファベットが用いられる。これら $p, q, r, \ldots$ は文に相当するもので、命題論理の「専門用語」では、**命題変項**、もしくは文変項、命題変数などと呼ばれる[*6]。

[*5] 厳密にいえば、その二つの事象の因果関係も読みとれるが、ここでは問題にしない。

[*6] 大事な点なので、繰り返し注意しておこう。ここで「命題」と呼んでいるのは、$p, q, r, \ldots$ が表している内容である。$p, q, r, \ldots$ は、それらを表す「文」にあたる記号である。

ここで p, q, r などを文と呼ばずに命題変項と呼ぶ理由は、p や q が固定的に「雨が降っている」や「道路が濡れている」を意味するのではなく、p は仮に「雨が降っている」を表すものとしよう、とか、q は「道路が濡れている」を表すものとしよう、というように使うからである。これは代数学における変数 x や y の使い方と本質的に同じである。従って「変数」とか「変項」と呼ばれるのである。

この命題変項を基本として、複合命題など命題一般を表すものを定義する。これは**論理式** (logical form)、もしくは整式 (wff, well formed formula) と呼ばれている。

定義 3.1　(命題論理における) **論理式**の定義

1. **命題変項**は論理式である。命題変項を**基本論理式**もしくは**原子論理式**と呼ぶこともある。
2. 論理式の前に $\sim$ をつけたものも論理式である。
3. 任意の二つの論理式を $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ のいずれかの論理結合記号で結合したものも論理式である。
4. 以上のものだけが、論理式である。

この定義に現れた $\sim$ は**否定** (negation) を表す結合記号であり、$\neg$ と表すこともある。また、$\wedge$ は **連言** (conjunction) の結合記号、$\vee$ は**選言** (disjunction) の結合記号、$\rightarrow$ は**含意** (implication) の結合記号、$\leftrightarrow$ は**同値** (equivalence) の結合記号といい、それぞれ &、 |、 $\supset$、 $\equiv$ と表すこともある。

日常言語でいえば、否定は「$\sim$(で) ない」、連言は「かつ、そして」、選言は「または、もしくは」、含意は「ならば」にほぼ対応する。したがって p を「雨が降っている」、q を「道路が濡れている」をそれぞれ表すとすると、

- $\sim p$ (もしくは $\neg p$) は「雨が降っていることはない」、すなわち「雨が降っていない」という命題を、
- $p \wedge q$ (もしくは $p\&q$) は「雨が降っている、かつ道路が濡れている」という命題を、
- $p \vee q$ (もしくは $p\ |q$) は「雨が降っている、または道路が濡れている」という命題を、
- $p \rightarrow q$ (もしくは $p \supset q$) は「雨が降っているならば、道路が濡れている」という命題を、
- $p \leftrightarrow q$ (もしくは $p \equiv q$) は「雨が降っているならば道路が濡れている、かつ道路が濡れているならば雨が降っている」という命題を、

をそれぞれ表す。

定義 3.1 によって、p や q という基本論理式から、$\sim p$ や $p \wedge q$ や $q \rightarrow r$ のような論理式が作られる。それだけではなく、さらに再帰的にこれを適用して、$\sim p \wedge q$ や $p \wedge q \rightarrow r$ のような複雑な論理式も作られるのである。

ところで、ここには問題がないことはない。例えば $p \wedge q \rightarrow r$ という論理式を考えてみると、これは $p \wedge q$ と r とを $\rightarrow$ によって結合したものか、p と $q \rightarrow r$ とを $\wedge$ によって結合したものかがわかりにくい。これを「論理式の構文論的曖昧さ」という。ここで「構文論」とは、この論理式が命題変項と論理結合記号によってどのように組み立てられているかを意味する[*7]。この「曖昧さ」は問題である。分かりにくいばかりではなく、どういう組み合わせを考えるかによって真理値が異なってしまい、曖昧さを排除するために形式言語を考えたことが無駄になる。

そこで、どれとどれが結合されているかを明示するために括弧 ( ), [ ], { }, が用いられる。

定義 3.2　補助記号 (括弧)

( )、 [ ]、 { }, は括弧である。ただし、(、 [、 {は特に「開き括弧」と呼ばれ、それぞれ対応する「閉じ括弧」)、]、} が存在する。そして、開き括弧を書く場合は必ず対応する閉じ括弧を書かなければならない。逆に閉じ括弧には必ず対応する開き括弧がなければならない。

括弧を使えば、曖昧だった論理式 $p \wedge q \rightarrow r$ は、

[*7] 論理式がどのように組み立てられているかということは「論理式の構造」という言葉で呼ばれる。ちなみにこの**構造** (structure) という用語は科学一般においてとても重要である。

- $(p \wedge q) \to r$
- $p \wedge (q \to r)$

のように曖昧さなしで表現される。

このように括弧を使えば曖昧さなく論理式を表すことが可能である。もっとも、括弧ばかりになって、次の式のように見にくくなることもある:

$$(((((p \wedge q) \wedge r) \wedge s) \wedge t) \wedge u) \vee v$$

同じことは数学一般において起こることである。そこで、代数においては、演算子に結合の強さの順序を決めてある。これにより、$-x + y \times z = u$ という数式は $((-x) + (y \times z)) = u$ と解釈されるようになっている。

そこで、論理学においても、論理結合記号に対して結合の強さの順序を決めておけば、括弧なしでも 、ある程度、曖昧さなく構造が決定できる。この考え方から決められた論理結合記号の「結合の強さ」の表が下である。

結合の強さ	論理結合記号	(参考) 算術演算子
最も強い	$\sim$ (否定)	$-$ (負の符合)
強い	$\wedge, \vee$ (連言、選言)	$\times, \div$ (乗算、除算)
弱い	$\to$ (含意)	$+, -$ (加算、減算)
最も弱い	$\leftrightarrow$ (同値)	$=$ (等号)

演習 3.1　次の論理式はどのように曖昧であろうか。論理結合記号の「結合の強さ」を仮定した場合に何通りの解釈の可能性があるかを答えよ。また、一通りの解釈しかない場合は、結合の強さを考えないとしたら、その解釈は括弧を使ってどのように表記されるかを答えよ。複数の解釈がある場合には、それぞれの可能性に対し、適切に括弧を書き加えてすべての可能性を書き下せ。

1. $p \vee \sim q \wedge r$
2. $\sim p \wedge \sim q \to r$
3. $p \vee q \wedge r \to s \vee t$
4. $\sim\sim p \to q$
5. $p \to \sim q \to \sim r$

演習 3.2　以下の文を対応する命題論理式に翻訳せよ。ただし、p は「太郎は花子を好きだ」、q は「花子は太郎を好きだ」、r は「花子は次郎を好きだ」、s は「太郎は次郎を嫌っている」をそれぞれ表す命題変項とする。

1. 太郎が花子を好きならば、花子は太郎を好きだ。
2. 太郎は花子を好きだが、花子は次郎を好きだ。
3. 太郎は花子を好きではない。
4. 太郎は花子を好きか、もしくは好きではない。
5. 太郎は花子を好きで花子は次郎を好きならば、太郎は次郎を嫌っている。

演習 3.3　以下の文を命題論理の論理式で表せ。ただし、P,Q,R,S,U は以下に示すような命題を表す命題変項とする。

P: 太郎は医者が必要だ	Q: 太郎は弁護士が必要だ
R: 太郎は事故にあった	S: 太郎は病気だ
U: 太郎は怪我をしている	

1. 太郎は事故にあったなら太郎は弁護士が必要であり、太郎が病気なら太郎は医者が必要だ。
2. 太郎が医者も弁護士も必要ならば、太郎は事故にあったのだ。
3. 太郎は病気でもなく怪我もしていないのなら、太郎には医者は必要ない。

演習 3.4　P、Q、R、S、U は演習 3.3 と同じとする。以下の命題論理式を日本語で言い替えよ。

1. $\mathrm{P} \to (\mathrm{S} \vee \mathrm{U})$
2. $(\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q}) \leftrightarrow (\mathrm{R} \wedge \mathrm{U})$
3. $\mathrm{R} \to (\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})$