ベイズ推論に関する問題: 三囚人とタクシー問題

白井英俊 (機械情報工学科／情報知能学科)

1 基本となる確率論の説明

事前確率 (prior probability、無条件確率):
事象 A の事前確率を $P(A)$ とかく
ここで A を命題論理における命題のようなものと考える。以下もよく使う $\ldots P(A \wedge B), P(A \vee B), P(\neg A \wedge B), \ldots$
事象 A と事象 B が同時に成り立つ確率: $P(A \wedge B)$
注意: 二つの事象 A と B が「互いに独立な事象」ならば、$P(A \wedge B) = P(A) \times P(B)$ が成り立つが、そうでなければ (一般には) これは成立しない。
条件つき確率: $P(A \mid B)$
事象 B が成立していることが知られている場合に、事象 A でもある確率

1.1 条件つき確率と事前確率の関係

$P(A \mid B)$ と $P(A \wedge B)$ との間には以下の関係が成立:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}$$

これを書き換えると...

$$P(A \wedge B) = P(A \mid B)P(B)$$

また以下のようにも書ける ...

$$P(A \wedge B) = P(B \mid A)P(A)$$

1.2 ベイズ推論 (Bayesian Reasoning)

つまり、次の二式が成りたつことが分かった:

- $P(A \wedge B) = P(A \mid B)P(B)$ かつ
- $P(A \wedge B) = P(B \mid A)P(A)$

したがって、$P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$ となるから、

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

この二つの式がベイズ規則として一般に知られているものである。

1.3 ベイズ規則の例題: 三囚人問題

問題:

> 3 人の囚人 A、B、C のうち 1 人は恩赦で釈放され、残りの 2 人は処刑されることになっている。誰が恩赦になるか知っている看守に A が聞いた。
>
> 「B、C のうち少なくとも 1 人は処刑されるのだから、処刑される 1 人の名前を教えてくれないか？　それを教えてくれても私についての情報を教えたことにはならないだろう？」
>
> 看守は A の言い分に納得し、「B は処刑される」と答えた。それを聞いた A は、恩赦は自分か C のどちらかだから、自分が恩赦になる確率は $\frac{1}{3}$ から $\frac{1}{2}$ に増えた、と喜んだ。実際には、A の釈放される確率は？

解説: $\mathcal{A}$ を「A が恩赦になる」という事象、$\mathcal{B}$ を「B が恩赦になる」という事象、$\mathcal{C}$ を「C が恩赦になる」という事象 $\mathcal{K}$ を「看守が『B が処刑される』と発言する」という事象をそれぞれ表わすとする。

まず、事前確率は以下のとおりとする:

$$P(\mathcal{A}) = \frac{1}{3}, \quad P(\mathcal{B}) = \frac{1}{3}, \quad P(\mathcal{C}) = \frac{1}{3}$$

求めたいのは、$P(\mathcal{A} \mid \mathcal{K})$ である。ベイズの規則から、

$$P(\mathcal{A} \mid \mathcal{K}) = \frac{P(\mathcal{K} \mid \mathcal{A}) * P(\mathcal{A})}{P(\mathcal{K})}$$

となる。ここで、

$P(\mathcal{K}) = P(\mathcal{K} \mid \mathcal{A}) * P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{K} \mid \mathcal{B}) * P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{K} \mid \mathcal{C}) * P(\mathcal{C})$

であり、$P(A), P(B), P(C)$ は既知であるから、$P(\mathcal{K} \mid \mathcal{A})$, $P(\mathcal{K} \mid \mathcal{B})$, $P(\mathcal{K} \mid \mathcal{C})$ の値がどうなるか、考えてみよう。

$P(\mathcal{K} \mid \mathcal{A})$ とは、$\mathcal{A}$ のもとで $\mathcal{K}$ が起きる確率である。つまり、「A が恩赦になる」という時に「看守が『B が処刑される』と言う」確率である。これは、看守が「C が処刑される」という可能性もあったことを考えると $\frac{1}{2}$ となる。

また、$P(\mathcal{K} \mid \mathcal{B})$ とは、$\mathcal{B}$ のもとで $\mathcal{K}$ が起きる確率である。つまり、「B が恩赦になる」という時に「看守が『B が処刑される』と言う」確率である。これは 0、つまりあり得ない。

$P(\mathcal{K} \mid \mathcal{C})$ とは、$\mathcal{C}$ のもとで $\mathcal{K}$ が起きる確率である。つまり、「C が恩赦になる」という時に「看守が『B が処刑される』と言う」確率である。これは、看守が「C が処刑される」という可能性はなかったことになるので、1 である。

これらから、

$$P(\mathcal{K}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{3} + 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

が求められた。故に、

$$P(\mathcal{A} \mid \mathcal{K}) = \frac{\frac{1}{2} * \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

2　タクシー問題

問題: ある町では、緑のタクシーが 88 %、青のタクシーが 12 %の割合で走っている。この町でタクシーによるひき逃げ事件が起こり、目撃者は青いタクシーが轢いたと証言した。そこで目撃者の識別能力をテストしたところ、事件の状況では 90 %の確率で正解できるが 10 %の確率で間違えることが分かった。このとき青のタクシーが犯人である確率は？

解答：A ＝「青のタクシーが犯人という証言がなされる」、B ＝「ひき逃げしたタクシーが青色」($\neg B =$「ひき逃げしたタクシーが緑色」) とする。与えられている条件は、$P(\neg B) = 0.88, P(B) = 0.12$ (なぜなら、「他に情報がなんらなければ」その町のどのタクシーもひき逃げする可能性があるので、ひき逃げしたタクシーの色は、その町で走っているタクシーの色の割合で決る。)

ここで、$P(A)$ を求め、$P(B|A)$ を求める。「青のタクシーが犯人という証言」は「(青タクシーが犯人 $\wedge$「青タクシーが犯人の条件のもとでその証言がなされる」(＝証言が正しい)、もしくは、「緑タクシーが犯人」$\wedge$「緑タクシーが犯人の条件のもとでその証言がなされる」(＝「証言が間違い」) のいずれかで起る。

よって $P(A) = P(A|B) * P(B) + P(A|\neg B) * P(\neg B) = 0.90 * 0.12 + 0.10 * 0.88 = 0.196$
ゆえにベイズから、

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) * P(B)}{P(A)} = \frac{0.90 * 0.12}{0.90 * 0.12 + 0.10 * 0.88} = \frac{0.108}{0.196} \simeq 0.55$$

3　感染者問題

問題: ある国では、1000 分の 1 の確率である病気に感染している。検査薬により、感染者は 0.99 の確率で陽性反応が出る。しかし非感染者でも 0.01 の確率で陽性反応が出てしまう。そこで、陽性反応が出たある人の感染している確率は？

解答: $A =$「ある人が感染している」($\neg A =$「その人が感染していない」)、$B =$「検査で陽性反応がでる」($\neg B =$「検査で陽性反応がでない」) とする。

$P(A) = 0.001, P(\neg A) = 0.999$
$P(B) = 0.99 * 0.001 + 0.999 * 0.01 = 0.01098 \ (\simeq 0.011)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = \frac{0.99 * 0.001}{0.011} = 0.09$$

4 スミス氏の息子問題

男の子と女の子の出生の割合は等しく $\frac{1}{2}$ とする。そして、スミス氏には 2 人の子供がいることが分かっているとする。

1. さらに、上の子どもが男の子であることが分かっている。この時、下の子どもが男の子である確率はどのくらいか？

   解答: 0.5

2. (上の問とは無関係に) 二人のうち一人は男の子であることがわかっているとする。もう一人も男の子である確率はどれだけか？

   解答: (驚くかもしれないが) 0.5 ではなく、$\frac{1}{3}$

   解説：A を「二人のこどものうち一人は男の子」、B を「二人とも男の子」(一人は男の子だと分かっているので) とする。求めるべきは、$P(B|A)$。

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) * P(B)}{P(A)} = \frac{1.0 * (0.5)^2}{0.5 * 1.0 + 0.5 * 0.5} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$$